Lisensiaatintutkimus

BLD-kuvausten rajakäyttäytymisestä ja haarajoukoista.

ℝami Luisto

21. toukokuuta 2014

Tiivistelmä

Työssä käsitellään geometristen monistojen välisten BLD-kuvausten perusominaisuuksia. Erityisen mielenkiinnon kohteina ovat BLD-kuvausten rajakäyttäytyminen sekä siitä seuraavat haarajoukon komplementin säännöllisyysominaisuudet. Työn päätulos on L-BLD-kuvausten lokaalisti tasaisen rajan osoittaminen L-BLD-kuvaukseksi topologis-metrisillä tekniikoilla.

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä — Författare — Author

Rami Luisto

Työn nimi — Arbetets titel — Title

BLD-kuvausten rajakäyttäytymisestä ja haarajoukoista.

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Lisensiaatintyö	Toukokuu 2014	46 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Tässä työssä tutkitaan BLD-kuvausten rajakäyttäytymistä metrisillä tekniikoilla, ja näin saaduilla tuloksilla todistetaan rajoitteita BLD-kuvausten haarajoukon rakenteelle. BLD-kuvaukset määriteltiin vuonna 1988 kvasisäännöllisten kuvausten erikoistapauksena Euklidisten avaruuksien välillä (Martio-Väisälä). Koska BLD-kuvaukset ovat luonnollinen kuvausluokka ja ne voidaan määritellä varsin yleisessä tilanteessa esimerkiksi kvasisäännöllisiin kuvauksiin verrattuna, on BLD-kuvauksia tutkittu viime vuosina erityisesti yleistettyjen monistojen yhteydessä.

Määritelmä. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia sekä $L \geq 1$. Jatkuva, avoin ja diskreetti kuvaus $f\colon X \to Y$ on L-BLD-kuvaus, mikäli kaikille jatkuville poluille $\alpha\colon [0,1] \to \mathcal{M}$ pätee

$$L^{-1}\ell(\alpha) \leq \ell(f \circ \alpha) \leq L\ell(\alpha).$$

BLD-kuvauksilla on paljon samoja ominaisuuksia kuin kvasisäännöllisillä kuvauksilla, mutta jotkin todistukset nojaavat kvasisäännöllisten kuvauksien yhteydessä sovellettavissa oleviin analyyttisiin tuloksiin. Tämän johdosta tässä työssä tutkitaan mitkä BLD-kuvausten ominaisuuksista voidaan todistaa metrisin menetelmin. Tämän työn päätuloksena on todistaa seuraava BLD-kuvausten kompaktiusominaisuus topologis-metrisillä tekniikoilla.

Lause. *Kokoelma* $\{f\colon B^n \to \mathbb{R}^n \mid f(0) = 0, f$ *on* L*-BLD* $\}$ *on normaaliperhe ja sisältää rajakuvauksensa lokaalisti tasaisen suppenemisen suhteen.*

Kuvauksen haarajoukoksi kutsutaan sitä lähtöjoukon osajoukkoa, jossa kuvaus ei ole lokaali homeomorfismi. BLD-kuvaukset ovat topologisesti haarautuvia peitekuvauksia, ja tunnettu Černavskiin-Väisälän lause 60-luvulta sanoo, että tällaisilla kuvauksilla haarajoukko on topologisesti pieni. Tämän lauseen todistus käydään työssä tarkasti lävitse. Todistus hyödyntää topologista indeksiteoriaa, joka puolestaan nojaa kompaktisti kannettuun Alexander-Spanier-kohomologiaan, joiden perusominaisuudet käydään työssä lävitse. Työn päätuloksen avulla saadaan BLD-kuvauksen haarajoukon komplementille seuraava tulos.

Lause. *Olkoot* $\mathcal{M}$ *ja* $\mathcal{N}$ *Riemannin monistoja, joiden Ricci-kaarevuus on rajoitettu, sekä* $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ *BLD-kuvaus. Tällöin kuvauksen* f *haarajoukon komplementti on kvasikonveksi alue.*

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Metrinen geometria, Riemannin geometria, BLD-kuvaukset, topologinen aste, haarajoukko

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Annelle

Sisältö

Kiitokset

Haluan ilmaista kiitokseni ohjaajalleni dosentti Pekka Pankalle tuesta ja ohjauksesta, sekä mahdollisuudesta työskennellä keväällä 2012 Yhdysvalloissa, jossa työ on huomattavin osin valmistunut. Kiitän myös Purdue Universityä, University of Illinois at Urbana-Champaignia, sekä University of Michigania vieraanvaraisuudesta matkan aikana. Tahdon myös kiittää professoreita David Drasin, Aimo Hinkkanen, Robert Kaufman, Kai Rajala ja Jang-Mei Wu perheineen heidän osoittamastaan ystävällisyydestä ja vieraanvaraisuudesta matkan aikana.

Lisäksi tahdon kiittää työn tarkastajia, FT Pekka Alestaloa ja Professori Aimo Hinkkasta työn perusteellisesta tarkastamisesta, sekä useista hyvistä parannusehdotuksista sekä korjauksista.

1 Johdanto

Olkoot X ja Y kaksi metristä avaruutta ja $\mathcal{F}$ jokin kokoelma kuvauksia avaruuksien X ja Y välillä. Kokoelmaa $\mathcal{F}$ kutsutaan *normaaliperheeksi*, mikäli jokaiselle kokoelman $\mathcal{F}$ jonolle (f_j) löytyy osajono, joka suppenee tasaisesti kompakteissa joukoissa kohti jotakin kuvausta $f\colon X \to Y$.

Olkoot $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ kaksi Riemannin monistoa sekä $K \geq 1$. Kuvausta

$$f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$$

kutsutaan *(K-)kvasisäännölliseksi kuvaukseksi*, mikäli kuvaus f kuuluu Sobolev-luokkaan $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ ja toteuttaa melkein kaikilla $x \in \mathcal{M}$ epäyhtälön

$$\|Df(x)\|^n \leq K J_f(x), \tag{1}$$

missä $\|Df(x)\|$ on tangenttikuvauksen $Df(x)\colon T_xM \to T_{f(x)}N$ operaattorinormi ja $J_f(x)$ kuvauksen f Jacobin determinantti pisteesä x. Tunnetun Reshetnyakin lauseen [Ric93, Theorem I.4.1] nojalla kvasisäännöllinen kuvaus on joko diskreetti ja avoin kuvaus tai vakiokuvaus. Jatkuvaa, avointa ja diskreettiä kuvausta kutsutaan *haarautuvaksi peitekuvaukseksi.* Reshetnyakin lause nojaa A-harmonisten funktioiden teoriaan, jonka johdosta todistusta ei voi suoraan siirtää yleisempiin tilanteisiin, joissa määrittely- tai maalijoukkona ei ole Riemannin monisto. Lauseen [Ric93, Theorem VI.8.6.] nojalla kahden suljetun Riemannin moniston väliset K-kvasisäännölliset kuvaukset muodostavat normaaliperheen, jonka rajakuvaukset ovat edelleen K-kvasisäännöllisiä.

Artikkelissa [MV88] määritellään kvasisäännöllisten kuvausten erikoistapauksena seuraava BLD-kuvausten luokka.

Määritelmä. Olkoot $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ Riemannin monistoja. Kvasisäännöllinen kuvaus $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ on BLD-kuvaus, mikäli on olemassa sellainen $L \geq 1$, että melkein kaikilla $x \in \mathcal{M}$ pätee

$$L^{-1} \leq \ell(Df(x)) \leq \|Df(x)\| \leq L, \tag{2}$$

jossa $\ell(Df(x)) = \min_{|v|=1} |Df(x)v|$.

Koska kyseessä on kvasisäännöllisten kuvauksien osakokoelma ja BLD-kuvaus ei voi olla vakio, ovat BLD-kuvaukset avoimia ja diskreettejä. Lisäksi BLD-kuvausten joukolle voidaan todistaa samanhenkisiä kompaktisuustuloksia kuin kvasisäännöllisten kuvausten joukolle, katso esimerkiksi [MV88, Theorem 4.7.]. Artikkelissa [MV88] todistetaan edelleen, että yllä oleva analyyttinen määritelmä on Riemannin monistojen tapauksessa kvantitatiivisesti yhtäpitävä seuraavan metrisen määritelmän kanssa, jota työssä jatkossa käytetään BLD-kuvausten määritelmänä.

Määritelmä. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia sekä $L \geq 1$. Jatkuva, avoin ja diskreetti kuvaus $f\colon X \to Y$ on L-BLD-kuvaus, mikäli kaikille jatkuville poluille $\alpha\colon [0,1] \to \mathcal{M}$ pätee epäyhtälöketju

$$L^{-1}\ell(\alpha) \leq \ell(f \circ \alpha) \leq L\ell(\alpha). \tag{3}$$

Tunnetut todistukset määritelmien yhtäpitävyydelle nojaavat kuitenkin Reshetnyakin lauseeseen, joten niitä ei voi suoraan siirtää yleisempiin tilanteisiin, katso esimerkiksi [MV88, Theorem 2.16.(3)].

Tämän työn päätuloksena on todistaa seuraava BLD-kuvausten kompaktiusominaisuus topologis-metrisillä tekniikoilla. Seuraava lause vastaa työn lausetta 5.16, katso myös [MV88, Theorem 4.7.]. Seuraavassa merkitsemme Euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ yksikkökuulaa B^n.

Lause A. *Kokoelma*

$$\mathcal{F} = \{ f \colon B^n \to \mathbb{R}^n \mid f(0) = 0, f \text{ on } L\text{-BLD} \}$$

on normaaliperhe.

Kuvauksen haarajoukoksi kutsutaan sitä lähtöjoukon osajoukkoa, jossa kuvaus ei ole lokaali homeomorfismi. Työn päätuloksen avulla saadaan BLD-kuvauksen haarajoukon komplementille geometrisista säännöllisyyttä. Avointa ja yhtenäistä metrisen avaruuden osajoukkoa U kutsutaan *kvasikonveksiksi alueeksi*, mikäli on olemassa sellainen vakio $K \geq 1$, että mitkä tahansa kaksi pistettä $x, y \in U$ kohti löytyy sellainen polku $\beta \colon [0, 1] \to U$, jolle pätee

$$\beta(0) = x, \quad \beta(1) = y \quad \text{ja} \quad \ell(\beta) \leq K d(x, y).$$

Seuraava lause vastaa työn lausetta 5.24 ja luonteeltaan samankaltainen lauseen [MV88, Theorem 4.25.] kanssa.

Lause B. *Olkoot $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ Riemannin monistoja, joiden Ricci-kaarevuus on rajoitettu, sekä $f \colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ BLD-kuvaus. Tällöin kuvauksen f haarajoukon komplementti on kvasikonveksi alue.*

Työssä hyödynnetään kompaktisti kannettua Alexander-Spanier-kohomologiaa ja määritellään tämän avulla haarautuvan peitekuvauksen lokaali topologinen aste, joka on työssä erittäin tärkeä työkalu. Kohomologisten tekniikoiden sekä asteteorian avulla todistetaan tärkeitä haarautuvien peitekuvausten topologisia ominaisuuksia, kuten Černavskiin ja Väisälän lause ([Väi66]), joka antaa tietoa haarautuvan peitekuvauksen haarajoukon topologisesta dimensiosta.

Topologisen asteteorian avulla haarautuvien peitekuvauksien geometrialle saadaan kvalitiivisia rajoja. Yhdistämällä tähän BLD-kuvauksille käytössä olevia Lipschitz-analyyttisiä tekniikoita, erityisesti Rademacherin lause sekä pinta-alakaava, saadaan näistä rajoista kvantitatiivisia. Näiden tekniikoiden lisäksi tärkeänä apukeinona käytetään niin kutsuttujen LQ-kuvausten kompaktisuusominaisuuksia. LQ-kuvausten teoriaa ei ole käytetty suoraan kirjallisuudessa BLD-kuvausten tutkimiseen, mutta lähteessä [MV88] käytetään eräässä mielessä duaalista käsitettä, katso erityisesti [MV88, Lemma 2.12].

2 Perusmääritelmät ja -käsitteet

Työssä käsitellään lähinnä geometrisia monistoja, niiden välisiä BLD-kuvauksia sekä näiden geometrisia ominaisuuksia. Käsitteet esitellään tässä kappaleessa tiiviisti. Ellei toisin mainita, oletetaan kaikki työssä esiintyvät kuvaukset jatkuviksi.

Määritelmä 2.1. Kahden topologisen avaruuden välinen kuvaus $f \colon X \to Y$ on

(i) *ankara*, mikäli jokaisen kompaktin joukon $K \subset Y$ alkukuva $f^{-1}K$ on kompakti.

(ii) *avoin*, mikäli jokaisen avoimen joukon $U \subset X$ kuva fU on avoin.

(iii) *diskreetti*, mikäli jokaisen yksiön $\{y\} \subset Y$ alkukuva $f^{-1}\{y\}$ on diskreetti joukko.

Metrisen avaruuden X avointa kuulaa merkitään $B_X(x, r)$ tai lyhyemmin $B(x, r)$, mikäli taustalla olevasta metrisestä avaruudesta X ei ole epäselvyyttä. Metrisen avaruuden X osajoukon A *pullistumaa* merkitään

$$B_X(A, r) := \bigcup_{x \in A} B_X(x, r).$$

Euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ kuulaa merkitään $B^n(x, r)$ ja yksikkökuulaa $B^n(\mathbf{0}, 1)$ merkitään B^n. Topologisen avaruuden osajoukkoa kutsutaan *alueeksi*, mikäli se on avoin sekä yhtenäinen.

2.1 Metriset avaruudet ja polkumetriikka

Työssä tarkastellaan metrisiä avaruuksia, joiden metriikka saadaan polkujen pituuksia tutkimalla. Määritellään nyt polun pituus sekä niin kutsuttujen polkumetristen avaruuksien peruskäsitteet. Esitys seuraa oleellisesti kirjan [Gro99] kappaletta 1.

Määritelmä 2.2. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. *Polku* on mikä tahansa jatkuva kuvaus $\gamma\colon [a, b] \to X$. Mikäli $x, y \in X$ sekä pätee $\gamma(a) = x$ ja $\gamma(b) = y$, niin merkitään $\gamma\colon x \curvearrowright y$.

Polun γ *pituus* $\ell(\gamma) \in [0, \infty]$ on luku

$$\sup \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} d(\gamma(a_j), \gamma(a_{j+1})) \,\middle|\, a = a_0 < \cdots < a_k = b, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Polku γ on *suoristuva*, mikäli polun γ pituus $\ell(\gamma)$ on äärellinen. Polkua $\gamma\colon x \curvearrowright y$, jolle pätee $\ell(\gamma) \le K d(x, y)$ jollain $K \ge 1$ kutsutaan *(K-)kvasigeodeesiksi*. Mikäli polku $\gamma\colon x \curvearrowright y$ on 1-kvasigeodeesi, kutsutaan sitä *geodeesiksi* ja merkitään $\gamma\colon x \underset{G}{\curvearrowright} y$.

Ellei toisin mainita, jatkossa jokaisen polun määrittelyväliksi oletetaan yksikköväli $[0, 1]$. Huomaa, että määrittelyvälin uudelleenparametrisointi $[0, 1] \to [a, b]$ ei vaikuta polun pituuteen.

Metrinen avaruus X on *suoristuvasti yhtenäinen*, mikäli mitkä tahansa kaksi pistettä voidaan yhdistää suoristuvalla polulla eli jokaista pisteparia $x, y \in X$ kohti löytyy sellainen polku $\gamma\colon x \curvearrowright y$, että $\ell(\gamma) < \infty$. Esimerkiksi kaikki euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ alueet ja yleisemmin kaikki yhtenäiset Riemannin monistot ovat suoristuvasti yhtenäisiä. Suoristuvasti yhtenäiseen metriseen avaruuteen X määritellään *polkumetriikka* d_ℓ asettamalla

$$d_\ell(x, y) = \inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma\colon x \curvearrowright y\} \quad \text{kaikilla } x, y \in X.$$

On suoraviivaista tarkistaa, että d_ℓ on metriikka.

Jos suoristuvasti yhtenäisen metrisen avaruuden polkumetriikka on avaruuden alkuperäinen metriikka, avaruutta kutsutaan *polkumetriseksi avaruudeksi.* Jos jokaista pisteparia $x, y \in X$ kohti on olemassa geodeesi $\gamma\colon x \underset{g}{\curvearrowright} y$, avaruutta X sanotaan *geodeettiseksi avaruudeksi.* Olkoon $A \subset \mathcal{M}$ polkumetrisen moniston $\mathcal{M}$ osajoukko. Jos on olemassa sellainen vakio $K \geq 1$, että jokainen pistepari $x, y \in A$ voidaan yhdistää polulla $\gamma\colon [0,1] \to A$, jonka pituus on enintään $Kd(x,y)$, niin joukkoa A sanotaan *K-kvasikonveksiksi.* Joukko A on *melkein K-kvasikonveksi*, jos se on $(K+\varepsilon)$-kvasikonveksi kaikilla $\varepsilon > 0$. Huomaa, että metrinen avaruus on geodeettinen (vast. polkumetrinen) avaruus, jos ja vain jos se on (vast. melkein) 1-kvasikonveksi avaruus.

Seuraava lause tunnetaan nimellä Hopfin-Rinowin lause. Todistus löytyy lähteestä [Gro99, Hopf-Rinow Theorem, s. 9].

Lause 2.3 (Hopf-Rinowin lause)**.** *Olkoon (X,d) täydellinen suoristuvasti yhtenäinen metrinen avaruus. Tällöin polkumetrinen avaruus (X, d_ℓ) on geodeettinen avaruus ja kaikki sen suljetut kuulat ovat kompakteja.*

Määritelmä 2.4. Polkumetristä avaruutta, joka on lisäksi monisto sanotaan *metriseksi monistoksi.*

Määritelmä 2.5. Metrisellä monistolla $\mathcal{M}$ on *rajoitettu geometria*, mikäli on olemassa sellaiset positiiviset vakiot R ja L, että kaikilla pisteillä $x \in \mathcal{M}$ on olemassa L-bilipschitz -kuvaus

$$g\colon B_{\mathcal{M}}(x,R) \to B^n(\mathbf{0},R),$$

joka kuvaa pisteen x origoon. Haluttaessa korostaa vakioita sanotaan, että geometria on *(L,R)-rajoitettu.* Kyseisiä kuulaympäristön ja kuvauksen muodostamia pareja $(B_{\mathcal{M}}(x,R), g)$ kutsutaan (L,R)-kartoiksi.

Geometria on *infinitesimaalisesti bilipschitz-euklidinen*, mikäli jokaista lukua $L > 1$ kohti on olemassa luku $R(L)$ siten, että geometria on $(L, R(L))$-rajoitettu.

Huomaa, että rajoitetun geometrian monistot ovat täydelllisiä. Toisaalta kaikilla täydellisillä Riemannin monistoilla, joiden Ricci-kaarevuus on ylhäältä rajoitettu, on infinitesimaalisesti rajoitettu geometria, katso esimerkiksi [LF73, 2.2.].

Määritelmä 2.6. *Geometrinen monisto* on polkumetrinen monisto, jolla on rajoitettu geometria.

2.2 Tärkeimpiä kuvaustyyppejä

Seuraavaksi käydään läpi tärkeimpiä työssä käytettyjä kuvaustyyppejä sekä joitain niiden perusominaisuuksia.

2.2.1 Haarautuvat peitekuvaukset

Määritelmä 2.7. Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia. Kuvaus $f\colon X \to Y$ on *haarautuva peitekuvaus*, mikäli se on jatkuva, avoin ja diskreetti.

Mikäli pisteellä $x \in X$ on olemassa sellainen ympäristö U, että rajoittuma $f|_U$ on injektio, niin kuvauksen f sanotaan olevan lokaali injektio pisteessä x.

Lause 2.8. *Olkoot $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ n-ulotteisia monistoja. Jatkuva avoin kuvaus $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ on lokaali homeomorfismi pisteessä $x \in \mathcal{M}$, jos ja vain jos f on pisteessä x lokaali injektio.*

Todistus. Homeomorfismi on aina injektio, joten mikäli kuvaus f on pisteessä $x \in \mathcal{M}$ lokaali homeomorfismi, on se myös lokaali injektio pisteessä x.

Oletetaan että pisteellä $x \in \mathcal{M}$ on sellainen ympäristö U, että rajoittuma $f|_U\colon U \to fU$ on injektio. Koska kuvaus f oletettiin avoimeksi, on rajoittuma myös avoin kuvaus. Rajoittuma $f|_U\colon U \to fU$ on täten jatkuvana avoimena bijektiona homeomorfismi ja väite on todistettu. $\square$

Määritelmä 2.9. Kuvauksen $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ *haarajoukko* $B_f \subset \mathcal{M}$ on niiden lähtömoniston pisteiden joukko, joissa kuvaus f ei ole lokaali homeomorfismi.

Suoraan määritelmästä seuraa, että haarajoukko on aina suljettu. Myöhemmin kappaleessa 4.1 näytetään, että kahden n-ulotteisen moniston välisen haarautuvan peitekuvauksen haarajoukko on sisäpisteetön eikä separoi lokaalisti lähtömonistoa.

2.2.2 Lipschitz tekijä -kuvaukset

Määritelmä 2.10. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia. Kuvaus $f\colon X \to Y$ on *(L-) Lipschitz tekijä -kuvaus*, mikäli on olemassa sellainen vakio $L \geq 1$, että kaikilla $x \in X$ ja $r \in \mathbb{R}_+$ pätee

$$B_Y(f(x), L^{-1}r) \subset fB_X(x,r) \subset B_Y(f(x), Lr). \tag{4}$$

Jatkossa (L-) Lipschitz tekijä -kuvauksia kutsutaan lyhyesti (L-) LQ -kuvauksiksi. Lyhenne "LQ" tulee sanoista *Lipschitz Quotient*. LQ-kuvausten määritelmä sekä niiden perusominaisuudet löytyvät esimerkiksi lähteestä [BJL+99]. Jatkossa käytetään myös seuraavaa relatiivista määritelmää.

Määritelmä 2.11. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja $A \subset X$ avoin joukko. Kuvaus $f\colon A \to Y$ on *(L-)LQ-kuvaus joukon A suhteen*, mikäli kaikilla $x \in A$ pätee

$$B_Y(f(x), L^{-1}r) \subset fB_X(x,r) \subset B_Y(f(x), Lr)$$

kaikilla $r \in \mathbb{R}_+$, joilla on voimassa $B_X(x,r) \subset A \subset X$.

Jonkin joukon suhteen määriteltyä LQ-kuvausta kutsutaan jatkossa myös relatiiviseksi LQ-kuvaukseksi. Huomaa, että relatiivisen LQ-kuvauksen määritelmässä tarkastellaan *ainoastaan* kuulia, jotka sisältyvän annettuun joukkoon. Suoraan määritelmän perusteella (relatiiviset) LQ-kuvaukset ovat aina avoimia. Kirjataan tämä tulos lemmaksi myöhempää käyttöä varten.

Lemma 2.12. *Olkoot X metrinen avaruus ja $A \subset X$ avoin joukko. Tällöin LQ-kuvaus $f\colon A \to Y$ joukon A suhteen on avoin kuvaus.*

2.2.3 Rajoitetun pituusvääristymän kuvaukset

Määritelmä 2.13. Olkoot $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ polkumetrisiä monistoja. Jatkuva, avoin ja diskreetti kuvaus $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ on *(L-)rajoitetun pituusvääristymän kuvaus*, mikäli on olemassa sellainen vakio $L \geq 1$, että kaikilla poluilla $\alpha\colon [0,1] \to \mathcal{M}$ pätee

$$L^{-1}\ell(\alpha) \leq \ell(f \circ \alpha) \leq L\ell(\alpha). \tag{5}$$

Jatkossa rajoitetun pituusvääristymän kuvauksia kutsutaan BLD-kuvauksiksi. Lyhenne BLD tulee sanoista *Bounded Length Distortion*. BLD-kuvausten määritelmä ja perusominaisuudet löytyvät esimerkiksi lähteestä [MV88].

Huomaa, että polkujen pituusepäyhtälö (5) vaaditaan *kaikilta* poluilta eikä pelkästään suoristuvilta poluilta. Tässä työssä käytettävä määritelmä on sama kuin määritelmä 0.1. artikkelissa [HR02]. Tilanteessa, jossa kuvaus on muotoa $G \to \mathbb{R}^n$, missä G on euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ alue, on määritelmä yhtäpitävä myös artikkelissa [MV88] käytetyn analyyttisen määritelmän kanssa kuten kyseisessä artikkelissa todistetaan ([MV88, Theorem 2.16.(3)]).

Mikäli polkujen pituusepäyhtälö (5) vaadittaisiin vain suoristuvilta poluilta, saataisiin aikaan eri luokka kuvauksia, sillä esimerkiksi identtinen kuvaus Heisenbergin ryhmältä kolmiulotteiselle euklidiselle avaruudelle ei ole BLD-kuvaus, mutta se toteuttaa epäyhtälön (5) kaikilla suoristuvilla poluilla, kuten seuraava esimerkki osoittaa.

Esimerkki 2.14. Määritellään Heisenbergin ryhmä $\mathbb{H}^3$ asettamalla kolmiulotteiseen euklidiseen avaruuteen $\mathbb{R}^3$ normi

$$\|(x,y,t)\|_{\mathbb{H}} = \sqrt[4]{(x^2+y^2)^2+t^2} \quad \text{kaikilla } (x,y,t) \in \mathbb{R}^3.$$

Identtinen kuvaus $\mathrm{id}\colon \mathbb{H}^3 \to \mathbb{R}^3$ ei ole BLD-kuvaus, sillä esimerkiksi polulle

$$\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{H}^3, \quad \alpha(t) = (0,0,t),$$

pätee

$$\begin{aligned} \ell_{\mathbb{H}^3}(\alpha) &= \sup\left\{ \sum_{j=0}^{k-1} d(\gamma(a_j),\gamma(a_{j+1})) \,\middle|\, a = a_0 < \cdots < a_k = b, k \in \mathbb{N} \right\} \\ &= \sup\left\{ \sum_{j=0}^{k-1} \sqrt{|a_j - a_{j+1}|} \,\middle|\, a = a_0 < \cdots < a_k = b, k \in \mathbb{N} \right\} \\ &= \infty, \end{aligned}$$

mutta $\ell_{\mathbb{R}^3}(\mathrm{id} \circ \alpha) = 1$.

Toisaalta suora lasku osoittaa, että $\|(x,y,t)\| \leq \|(x,y,t)\|_{\mathbb{H}^3}$ kaikilla $(x,y,t) \in \mathbb{R}^3$, joten identtinen kuvaus $\mathrm{id}\colon \mathbb{H}^3 \to \mathbb{R}^3$ on lokaalisti 1-Lipschitz. Näin ollen kaikille poluille $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{H}^3$ pätee $\ell_{\mathbb{R}^3}(\mathrm{id} \circ \alpha) \leq \ell_{\mathbb{H}^3}(\alpha)$. Lisäksi huomataan, että yhtälön [CDPT07, (2.19), p.20] nojalla suoristuvalle polulle $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{H}^3$ pätee

$$\ell_{\mathbb{H}^3}(\alpha) = \ell_{\mathbb{R}^2}(\mathrm{pr}_1 \circ \alpha, \mathrm{pr}_2 \circ \alpha).$$

Lisäksi huomion [CDPT07, Remark 2.3.] nojalla polulle α pätee, että

$$|\alpha_3(0) - \alpha_3(1)| \leq 2\ell_{\mathbb{R}^2}(\mathrm{pr}_1 \circ \alpha, \mathrm{pr}_2 \circ \alpha).$$

Tästä seuraa, että kuvaus $\mathrm{id}\colon \mathbb{H}^3 \to \mathbb{R}^3$ toteuttaa BLD-kuvausten polkuihin liittyvän epäyhtälön kaikilla suoristuvilla poluilla.

3 Kohomologia, suunnistus ja indeksit

Geometrisille monistoille ei määritelmän nojalla oleteta minkäänlaista sileää rakennetta, joten analyyttiset työkalut rajoittuvat tässä työssä lähinnä Lipschitz-analyyttisiin menetelmiin, eikä esimerkiksi johdannossa mainittua A-harmonisten kuvausten teoriaa voida käyttää. Tämän rajoitteen takia työssä nojataan voimakkaasti geometristen monistojen sekä niiden välisten kuvausten topologisiin ominaisuuksiin. Tässä kappaleessa tarkastellaan muutamia monistoihin ja jatkuviin kuvauksiin liittyviä topologisia työkaluja (topologinen suunnistus, kuvauksen aste). Työkaluna käytetään kompaktisti kannettua kohomologiaa.

Geometrisen indeksin määrittelyssä voidaan käyttää useampaa eri kohomologiateoriaa, esimerkiksi modernissa kirjallisuudessa usein käytettyä singulaarista kohomologiateoriaa. Tässä työssä tarvitaan hieman pidemmälle meneviä kohomologisia tuloksia, jonka vuoksi tulokset todistetaan Alexander-Spanier-kohomologian avulla. Työn kannalta oleellinen ero singulaariseen kohomologiaan on siinä, että Alexander-Spanier -kohomologia suhtautuu monistojen suljettujen osajoukkojen kohomologiaan paremmin kuin singulaarinen vastineensa. Erityisesti ero nähdään lauseessa 3.10, jonka mukaan Alexander-Spanier -kohomologiassa saadaan moniston $\mathcal{M}$, sen avoimen osajoukon U sekä joukon U komplementin A inkluusioiden indusoimana aikaan pitkä eksakti jono

$$\cdots \longrightarrow H_c^{p-1}(U) \longrightarrow H_c^{p-1}(\mathcal{M}) \longrightarrow H_c^{p-1}(A) \longrightarrow H_c^{p}(U) \longrightarrow H_c^{p}(\mathcal{M}) \longrightarrow H_c^{p}(A) \longrightarrow \cdots.$$

Singulaarisen kohomologian tilanteessa vastaavat indusoidut kuvaukset saadaan määriteltyä, mutta kohomologiaryhmät $H_c^k(A)$ korvautuvat niin kutsutuista suorista rajoista saatavilla ryhmillä $\varinjlim H_c^k(U_i)$, missä joukot U_i muodostavat joukon A ympäristökannan. Tämä suoran rajan antama ryhmä voi olla eri kuin alkuperäinen ryhmä $H_c^k(A)$. Katso esimerkiksi [Mas91, Example 6.1, p. 219].

3.1 Aleksander-Spanier -kohomologia

Kompaktisti kannatetun Aleksander-Spanier -kohomologian voi määritellä minkä tahansa vaihdannaisen ryhmän suhteen, mutta tässä työssä rajoitutaan kokonaislukujen ryhmään. Tässä kappaleessa määritellään kompaktisti kannatettu Alexander-Spanier -kohomologia sekä todistetaan joitakin sen perusominaisuuksia. Kappaleen sisältö seuraa pääosin kirjaa [Mas78].

Määritelmä 3.1. Olkoon X epätyhjä lokaalisti kompakti topologinen avaruus. Määritellään kaikilla $p = 0, 1, \ldots$ joukko

$$\Phi^p(X) = \{\phi\colon X^{p+1} \to \mathbb{Z} \mid \sharp\,\mathrm{Im}(\phi) < \infty\},$$

sekä kuvaus $\delta^p \colon \Phi^p(X) \to \Phi^{p+1}(X)$ asettamalla

$$\delta^p\phi(x_0, \dots, x_p) = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \phi(x_0, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_p).$$

Kun $p < 0$, asetetaan $\Phi^p(X) = \{0\}$ sekä määritellään $\delta^p \colon \Phi^p(X) \to \Phi^{p+1}(X)$ kaavalla $\phi \mapsto 0$.

Joukon $\Phi^p(X)$ alkioita kutsutaan avaruuden X *p-funktioiksi* ja ne muodostavat luonnollisella tavalla vaihdannaisen ryhmän. Huomionarvoista on, ettei niiltä vaadita mitään jatkuvuusomiaisuuksia, ainoastaan kuvajoukon äärellisyys. Suora lasku osoittaa, että $\delta^{p+1} \circ \delta^p$ on nollakuvaus.

Annetun p-funktion $\phi \in \Phi^p(X)$ *kantaja* $\operatorname{spt}(\phi)$ koostuu niistä pisteistä $x \in X$, joiden jokaisella ympäristöllä U pätee, että rajoittuma $\phi|_{U^{p+1}}$ ei ole nollakuvaus. Huomaa, että p-funktion $\phi \colon X^{p+1} \to \mathbb{Z}$ kantaja on määritelty avaruudessa X eikä funktion ϕ määrittelyjoukossa X^{p+1}. (Pois lukien tapauksessa $p = 0$, jolloin kyseessä on 'tavallinen' kantaja.)

Lemma 3.2. *Kaikille p-funktioille $\phi, \xi \in \Phi^p(X)$ ovat voimassa seuraavat ominaisuudet:*

(a) $\operatorname{spt}(\delta^p\phi) \subset \operatorname{spt}(\phi)$,

(b) $\operatorname{spt}(\phi + \xi) \subset \operatorname{spt}(\phi) \cup \operatorname{spt}(\xi)$, *ja*

(c) joukko $\operatorname{spt}(\phi)$ *on suljettu.*

Todistus. Olkoon $x \in \operatorname{spt}(\delta^p\phi)$ ja olkoon U pisteen x mielivaltainen ympäristö. Koska rajoittuma $(\delta^p\phi)|_{U^{p+2}}$ ei kantajan määritelmän nojalla ole nollakuvaus, on olemassa sellainen piste $(y_0, \dots, y_{p+1}) \in U^{p+2}$, että $(\delta^p\phi)(y_0, \dots, y_{p+1}) \neq 0$. Koska

$$(\delta^p\phi)(y_0, \dots, y_{p+1}) = \sum_{j=0}^{p} \phi(y_0, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_{p+1}) \neq 0,$$

niin jollakin $j \in \{0, \dots, p+1\}$ on välttämättä voimassa

$$\phi(y_0, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_{p+1}) \neq 0.$$

Edelleen pätee $(y_0, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_{p+1}) \in U^{p+1}$, joten rajoittuma $\phi|_{U^{p+1}}$ ei ole nollakuvaus. Koska ympäristö U oli mielivaltainen, pätee $x \in \operatorname{spt}(\phi)$ ja väite (a) on todistettu.

Olkoot $\phi, \xi \in \Phi^p(X)$ ja U avoin joukko. Väite (b) seuraa siitä, että jos rajoittuma $(\phi+\xi)|_{U^{p+1}}$ on epätriviaali, niin jommankumman rajoittumista $\phi|_{U^p}$ tai $\xi|_{U^p}$ on välttämättä oltava epätriviaali.

Olkoon $\phi \in \Phi^p(X)$ ja $x \in \complement\operatorname{spt}(\phi)$. Tällöin on olemassa pisteen x sellainen ympäristö U, että rajoittuma $\phi|_{U^{p+1}}$ on nollakuvaus. Erityisesti kaikilla pisteillä $y \in U$ pätee, että rajoittuma $\phi|_{U^{p+1}}$ on nollakuvaus. Täten on voimassa $U \subset \complement\operatorname{spt}(\phi)$, joten joukko $\operatorname{spt}(\phi)$ on suljettu avoimen joukon komplementtina. Tämä todistaa väitteen (c). $\square$

Kantajan avulla voidaan määritellä *lokaalisti triviaalien p-funktioiden joukko*

$$\Phi_0^p(X) = \{\phi \in \Phi^p(X) \mid \mathrm{spt}(\phi) = \emptyset\},$$

sekä *kompaktisti kannettujen p-funktioiden joukko*

$$\Phi_c^p(X) = \{\phi \in \Phi^p(X) \mid \mathrm{spt}(\phi) \text{ kompakti } \}.$$

Määritelmä 3.3. Olkoon X lokaalisti kompakti topologinen avaruus. Kaikilla $p = 0, 1, \ldots$ määritellään *avaruuden X p-koketjujen joukko*

$$C^p(X) = \Phi^p(X)/\Phi_0^p(X)$$

sekä *avaruuden X kompaktisti kannatettujen p-koketjujen joukko*

$$C_c^p(X) = \Phi_c^p(X)/\Phi_0^p(X).$$

Huomautus 3.4. Huomaa, että (kompaktisti kannatettujen) p-koketjujen määritelmän johdosta kyseiset koketjut tarvitsee määritellä vain lokaalisti. Tarkemmin ilmaistuna, mikäli $\mathcal{U}$ on avaruuden X avoin peite ja $\phi \in \Phi^p(X)$ on p-funktio jolle pätee, että $\phi(x_0, \ldots, x_p) = 0$ aina kun on olemassa sellainen $U \in \mathcal{U}$, että $x_0, \ldots, x_p \in U$, niin tällöin $\phi \in \Phi_0^p(X)$. Erityisesti p-koketjun määrittelemiseksi riittää määritellä p-funktio jonkin avaruuden X avoimen peitteen $\mathcal{U}$ alkioiden U karteesisissa tuloissa U^{p+1}.

Kirjataan tämän huomion seuraus lemmaksi myöhempää käyttöä varten.

Lemma 3.5. *Olkoon $\phi \in \Phi^p(X)$. Mikäli $\{U_1, \ldots, U_k\}$ on kokoelma erillisiä avoimia avaruuden X osajoukkoja, joille pätee $\mathrm{spt}(\phi) \subset \bigcup_{j=1}^k U_j$, niin tällöin*

$$[\phi] = \left[\sum_{i=1}^k \chi_{U_i^{p+1}} \cdot \phi\right]$$

joukossa $C^p(X)$.

Todistus. Merkitään

$$\psi := \sum_{i=1}^k \chi_{U_i^{p+1}} \cdot \phi.$$

Olkoon ensin $x \in \complement\mathrm{spt}(\phi)$. Tällöin on olemassa sellainen ympäristö $V \ni x$, että rajoittuma $\phi|_{V^{p+1}}$ on nollakuvaus. Nyt pätee

$$(\phi - \psi)|_{V^{p+1}} = \phi|_{V^{p+1}} - \sum_{i=1}^k \chi_{U_i^{p+1}} \cdot \phi|_{V^{p+1}} = 0,$$

joten $x \in \complement\mathrm{spt}(\phi - \psi)$.

Olkoon seuraavaksi $x \in \mathrm{spt}(\phi)$. Tällöin jollain $j_0 \in \{1, \ldots, k\}$ pätee $x \in U_{j_0}$. Nyt pätee

$$(\phi - \psi)|_{U_{j_0}^{p+1}} = \phi|_{U_{j_0}^{p+1}} - \sum_{i=1}^k \chi_{U_i^{p+1} \cap U_{j_0}^{p+1}} \cdot \phi|_{U_{j_0}^{p+1}} = \phi|_{U_{j_0}^{p+1}} - \phi|_{U_{j_0}^{p+1}} = 0,$$

joten $x \in \complement\mathrm{spt}(\phi - \psi)$.

Täten $\mathrm{spt}(\phi - \psi) = \emptyset$ ja väite on todistettu. $\square$

Lemman 3.2 nojalla kaikilla $p \in \mathbb{Z}$ pätee

$$\delta^p(\Phi_0^p(X)) \subset \Phi_0^{p+1}(X) \quad \text{sekä} \quad \delta^p(\Phi_c^p(X)) \subset \Phi_c^{p+1}(X).$$

Täten kuvaus $\delta^p \colon \Phi^p(X) \to \Phi^{p+1}(X)$ indusoi hyvinmääritellyt kuvaukset

$$d^p \colon C^p(X) \to C^{p+1}(X) \quad \text{sekä} \quad d_c^p \colon C_c^p(X) \to C_c^{p+1}(X),$$

joille pätee $d^{p+1} \circ d^p = 0$ ja $d_c^{p+1} \circ d_c^p = 0$. Edelleen voidaan määritellä avaruuden X (kompaktisti kannatetut) kohomologiaryhmät.

Määritelmä 3.6. Olkoon X lokaalisti kompakti topologinen avaruus. Kaikilla $p \in \mathbb{Z}$ määritellään *avaruuden X asteen p Aleksander-Spanier -kohomologiaryhmä*

$$H^p(X) = \operatorname{Ker}(d^p)/\operatorname{Im}(d^{p-1})$$

sekä *avaruuden X kompaktisti kannatettu asteen p Aleksander-Spanier -kohomologiaryhmä*

$$H_c^p(X) = \operatorname{Ker}(d_c^p)/\operatorname{Im}(d_c^{p-1}).$$

Jatkossa kirjoitelman paino on kompaktisti kannatetussa Alexander-Spanier -kohomologiassa.

3.2 Indusoidut kuvaukset

Olkoot X ja Y kaksi lokaalisti kompaktia topologista avaruutta. Kuvaus $f \colon X \to Y$ indusoi kaikilla $p \in \mathbb{Z}$ kuvauksen

$$f^\flat \colon \Phi^p(Y) \to \Phi^p(X), \quad (f^\flat \phi)(x_0, \ldots, x_p) = \phi(f(x_0), \ldots, f(x_p)).$$

Suora lasku osoittaa, että $\delta^p \circ f^\flat = f^\flat \circ \delta^p$. Mikäli kuvaus f on jatkuva, niin pätee $f^\flat \Phi_0^p(Y) \subset \Phi_0^p(X)$ ja voidaan määritellä kuvaus

$$f^\sharp \colon C^p(Y) \to C^p(X) \text{ kaavalla } f^\sharp([\phi]) = [f^\flat \phi].$$

Tämä indusoi edelleen kuvauksen

$$f^* \colon H^p(Y) \to H^p(X), \text{ kun asetetaan } f^*([\xi]) = [f^\sharp \xi],$$

sillä suora lasku osoittaa, että $f^\sharp \circ d^p = d^p \circ f^\sharp$. Mikäli kuvaus on myös ankara, on voimassa $f^\flat \Phi_c^p(Y) \subset \Phi_c^p(X)$ ja voidaan määritellä edelleen kuvaus

$$f^\sharp \colon C_c^p(Y) \to C_c^p(X) \text{ kaavalla } f^\sharp([\phi]) = [f^\flat \phi].$$

Myös tämä indusoi kuvauksen

$$f^* \colon H_c^p(Y) \to H_c^p(X), \text{ kun asetetaan } f^*([\xi]) = [f^\sharp \xi],$$

sillä suora lasku osoittaa taas, että $f^\sharp \circ d_c^p = d_c^p \circ f^\sharp$.

Seuraava lause osoittaa, että Alexander-Spanier -kohomologian määritelmä on homotopiainvariantti. Lauseen todistus löytyy lähteestä [Mas78, Theorem 1.11.]

Lause 3.7. *Olkoot f ja g kaksi ankaraa jatkuvaa kuvausta topologisten avaruudelta X avaruudelle Y. Mikäli on olemassa homotopia $F\colon X \times I \to Y$ kuvausten f ja g välillä, joka on kuvauksena ankara, niin indusoidut kuvaukset $f^*\colon H_c^p(Y) \to H_c^p(X)$ ja $g^*\colon H_c^p(Y) \to H_c^p(X)$ ovat samat kaikilla $p \in \mathbb{Z}$.*

Seuraavaksi määritellään lokaalisti kompaktien avaruuksien avointen- sekä suljettujen osajoukkojen inkluusioiden indusoimat kuvaukset. Kaikilla $B \subset X$ asetetaan

$$Q^p(X,B) = \{u \in C_c^p(X) \mid \operatorname{spt}(u) \subset X \setminus B\}.$$

Olkoon $U \subset X$ epätyhjä avoin joukko sekä $A = X \setminus U$. Inkluusio $\iota_{A,X}\colon A \to X$ on jatkuva ja se nähdään helposti ankaraksi kuvaukseksi. Tämän johdosta inkluusio $\iota_{A,X}$ indusoi aiemman huomion nojalla homomorfismit

$$\iota^\sharp_{A,X}\colon C_c^p(X) \to C_c^p(A) \quad \text{sekä} \quad \iota^*_{A,X}\colon H_c^p(X) \to H_c^p(A).$$

Inkluusio $\iota_{U,X}\colon U \to X$ puolestaan on myös jatkuva, mutta ei yleensä ankara. Tämän johdosta inkluusio $\iota_{U,X}$ ei yleensä indusoi kuvausta joukkojen $C_c^p(X)$ ja $C_c^p(U)$ välille. Se kuitenkin indusoi kuvauksen

$$\iota^\sharp_{U,X}\colon C^p(X) \to C^p(U),$$

joka selvästi toteuttaa ehdon $\iota^\sharp_{U,X} Q^p(X,A) \subset C_c^p(U)$. Enemmänkin pätee, ja voidaan todistaa seuraava lemma, joka on lähteestä [Mas78, Lemma 1.3.].

Lemma 3.8. *Kuvaus*

$$(\iota^\sharp_{U,X})|_{Q^p(X,A)}\colon Q^p(X,A) \to C_c^p(U)$$

on isomorfismi.

Todistus. Merkitään todistuksessa rajoittumaa

$$\xi := (\iota^\sharp_{U,X})|_{Q^p(X,A)}\colon Q^p(X,A) \to C_c^p(U).$$

Aloitetaan näyttämällä, että rajoittuma ξ on injektio. Olkoon $\phi \in \Phi^p(X)$ sellainen, että $[\phi] \in Q^p(X,A)$ ja $\xi([\phi]) = [\iota^\flat_{U,X}\phi] = \Phi_0^p(X)$. Tällöin jokaista pistettä $x \in X$ kohti löytyy sellainen ympäristö V, että $(\iota^\flat_{U,X}\phi)|_{V^{p+1}}$ on nollakuvaus. Valitaan mielivaltaiselle pisteelle $x \in U$ tällainen ympäristö V ja merkitään $W := U \cap V$. Nyt

$$0 = (\iota^\flat_{U,X}\phi)|_{W^{p+1}} = (\phi \circ (\iota_{U,X})^{p+1})|_{W^{p+1}} = \phi|_{W^{p+1}},$$

joten $U \subset \complement\operatorname{spt}(\phi)$. Toisaalta p-funktion ϕ valinnan nojalla $\operatorname{spt}(\phi) \subset U$, joten $\operatorname{spt}(\phi) = \emptyset$. Erityisesti $\phi \in \Phi_0^p(U)$. Täten kuvaus ξ on injektio.

Osoitetaan seuraavaksi, että rajoittuma ξ on surjektio. Olkoon $\psi \in \Phi_c^p(U)$ ja määritellään $\phi \in \Phi^p(X)$ asettamalla

$$\phi(x_0,\dots,x_p) = \begin{cases} \psi(x_0,\dots,x_p), & \text{kun } x_0,\dots,x_p \in U, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases} \tag{6}$$

Selvästi pätee $\operatorname{spt}(\phi) \subset \operatorname{spt}(\psi) \subset U$ ja lisäksi joukko $\operatorname{spt}(\phi)$ on kompaktin joukon $\operatorname{spt}(\psi)$ suljettuna osajoukkona kompakti, joten $[\phi] \in Q^p(X,A)$. Suora lasku osoittaa, että $\xi([\phi]) = [\psi]$ ja rajoittuma ξ on surjektio. ◻

Joukko $Q^p(X,A)$ on ryhmän $C^p_c(X)$ aliryhmä. Merkitään inkluusiota

$$r\colon Q^p(X,A) \hookrightarrow C^p_c(X)$$

ja määritellään kaavioon

$$\begin{tikzcd} Q^p(X,A) \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\iota^\sharp_{U,X}"', "\simeq"] & C^p_c(X) \\ C^p_c(U) \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

perustuen homomorfismi

$$\sigma_{U,X}\colon C^p_c(U) \to C^p_c(X), \quad \sigma_{U,X} = r \circ (\iota^\sharp_{U,X}|_{Q^p(X,A)})^{-1}.$$

Tämä kuvaus indusoi edelleen kuvauksen

$$\tau_{U,X}\colon H^p_c(U) \to H^p_c(X).$$

Lemma 3.9. *Olkoon X topologinen avaruus sekä $U \subset V \subset X$ avoimia joukkoja. Tällöin $\tau_{U,X} = \tau_{V,X} \circ \tau_{U,V}$.*

Todistus. Merkitään

$$\begin{aligned} r_1 &\colon Q^p(X, X \setminus U) \hookrightarrow C^p_c(X), \\ r_2 &\colon Q^p(V, V \setminus U) \hookrightarrow C^p_c(V) \quad \text{ja} \\ r_3 &\colon Q^p(X, X \setminus V) \hookrightarrow C^p_c(X), \end{aligned}$$

sekä asetetaan

$$\begin{aligned} i_1 &= (\iota^\sharp_{U,X}|_{Q^p(U,X\setminus U)})^{-1}, \\ i_2 &= (\iota^\sharp_{U,V}|_{Q^p(U,V\setminus U)})^{-1} \quad \text{ja} \\ i_3 &= (\iota^\sharp_{V,X}|_{Q^p(V,X\setminus V)})^{-1}. \end{aligned}$$

Homomorfismien $\tau_{U,X}$, $\tau_{U,V}$ sekä $\tau_{V,X}$ määritelmien perusteella ne ovat muotoa

$$\tau_{U,X} = [\tau'_{U,X}], \quad \tau_{U,V} = [\tau'_{U,V}] \quad \text{ja} \quad \tau_{V,X} = [\tau'_{V,X}],$$

missä

$$\tau'_{U,X} = r_1 \circ i_1, \quad \tau'_{U,V} = r_2 \circ i_2, \quad \text{ja} \quad \tau'_{V,X} = r_3 \circ i_3.$$

Seuraavassa kaaviossa $s_2\colon Q^p(X, X\setminus U) \to Q^p(X, X \setminus V)$ on inkluusiokuvaus ja kuvaus $s_1\colon Q^p(V, V \setminus U) \to Q^p(X, X \setminus V)$ määritellään luonnollisesti edustajien kautta kuten kaavassa (6).

$$\begin{tikzcd} Q^p(X, X\setminus U) \arrow[r, hook, "s_2"] & Q^p(X, X\setminus V) \arrow[r, hook, "r_3"] & C^p_c(X) \\ Q^p(V, V\setminus U) \arrow[u, "s_1"] \arrow[r, hook, "r_2"] & C^p_c(V) \arrow[u, "i_3"] \arrow[ur, "\tau'_{V,X}"'] & \\ C^p_c(U) \arrow[u, "i_2"] \arrow[ur, "\tau'_{U,V}"'] & & \end{tikzcd}$$

Suora lasku osoittaa, että

$$i_3 \circ r_2 = s_2 \circ s_1, \quad r_3 \circ s_2 = r_1 \quad \text{ja} \quad s_1 \circ i_2 = i_1.$$

Täten saadaan

$$\tau'_{V,X} \circ \tau'_{U,V} = r_3 \circ i_3 \circ r_2 \circ i_2 = r_3 \circ s_2 \circ s_1 \circ i_2 = r_1 \circ i_1 = \tau'_{U,X}.$$

Tämä todistaa väitteen. □

Tämän luvun päätulos on seuraava lause, joka on lähteestä [Mas78, Theorem 1.6.].

Lause 3.10. *Olkoot X topologinen avaruus, U avoin ja epätyhjä avaruuden X osajoukko ja $A = X \setminus U$. Tällöin kaikilla $p \in \mathbb{Z}$ on olemassa sellainen homomorfismi $d^p \colon H_c^{p-1}(A) \to H_c^p(U)$, että jono*

(7)
$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_c^{p-1}(U) \arrow[r, "\tau_{U,X}"] & H_c^{p-1}(X) \arrow[r, "\iota^*_{A,X}"] & H_c^{p-1}(A) \arrow[dll, rounded corners, "d^p"] & \\
& H_c^{p}(U) \arrow[r, "\tau_{U,X}"] & H_c^{p}(X) \arrow[r, "\iota^*_{A,X}"] & H_c^{p}(A) \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

on eksakti.

3.3 Monistojen kohomologia sekä -suunnistus

Tässä kappaleessa määritellään moniston suunnistuvuus ja suunnistus kompaktisti kannatetun Alexander-Spanier -kohomologian avulla.

Seuraava lemma on lähteestä [Mas78, Theorem 2.14.].

Lemma 3.11. *Euklidiselle avaruudelle $\mathbb{R}^n$ on voimassa*

$$H_c^p(\mathbb{R}^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{kun } p = n \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Lemman 3.11 motivoimana annetaan seuraava määritelmä.

Määritelmä 3.12. Monisto $\mathcal{M}$ on *suunnistuva*, mikäli pätee

$$H_c^n(\mathcal{M}) \simeq \mathbb{Z},$$

missä n on moniston $\mathcal{M}$ dimensio. Ryhmälle $H_c^n(\mathcal{M})$ valittua virittäjää $\mu_{\mathcal{M}}$ kutsutaan moniston *suunnistukseksi* ja paria $(\mathcal{M}, \mu_{\mathcal{M}})$ sunnistetuksi monistoksi.

Moniston alueiden suunnistuksen määrittelyyn tarvitaan seuraavaa lemmaa, joka on lähteestä [Bor60, Theorem 4.3.].

Lemma 3.13. *Olkoot $\mathcal{M}$ suunnistuva n-ulotteinen monisto ja U epätyhjä alue. Tällöin pätee:*

(a) Inkluusion $\iota \colon U \hookrightarrow \mathcal{M}$ indusoima kuvaus $\tau_{U,\mathcal{M}} \colon H_c^n(U) \to H_c^n(\mathcal{M})$ on isomorfismi.

(b) $H_c^n(\mathcal{M} \setminus U) = 0$.

Kaikille suunnistetun moniston alueille U annetaan inkluusion $\iota\colon U \hookrightarrow \mathcal{M}$ indusoima suunnistus $\tau_{U,\mathcal{M}}^{-1}(\mu_{\mathcal{M}})$. Huomaa, että $\tau_{U,\mathcal{M}}^{-1}(\mu_{\mathcal{M}})$ on ryhmän $H_c^n(U)$ virittäjä, sillä $\tau_{U,\mathcal{M}}$ on isomorfismi ja erityisesti suunnistuvan moniston alueet ovat suunnistuvia.

Huomautus 3.14. Koska euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$ ja kaikki sen alueet ovat suunnistuvia lemman 3.11 nojalla, niin tarkastelemalla karttaympäristöjä nähdään, että jokainen monisto on lokaalisti suunnistuva. Tämä takaa sen, että mielivaltaisella monistolla voidaan käyttää tässä kappaleessa suunnistuville monistoille todistettavia tuloksia lokaalisti.

3.4 Topologinen aste sekä -indeksi

Suunnistettujen n-monistojen $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ välisten avoimien kuvausten $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ asteteorian määrittelemiseksi on tarpeellista tutkia niiden kompaktisti kannatettujen kohomologioiden välille indusoimia kuvauksia $f^*\colon H_c^n(\mathcal{N}) \to H_c^n(\mathcal{M})$. Vain ankarat kuvaukset indusoivat tällaisia kuvauksia, joten tässä kappaleessa keskitytään tutkimaan millaisiin joukkoihin rajoittumalla avoimen kuvauksen rajoittumasta saadaan ankara kuvaus. Kappaleen kaikki monistot oletetaan yhtenäisiksi.

Mikäli $f\colon (\mathcal{M}, \mu_{\mathcal{M}}) \to (\mathcal{N}, \mu_{\mathcal{N}})$ on jatkuva ankara kuvaus kahden suunnistetun moniston välillä, niin pätee $f^*\mu_{\mathcal{N}} = k\mu_{\mathcal{M}}$ jollain $k \in \mathbb{Z}$. Tätä lukua k kutsutaan kuvauksen f *asteeksi* $\deg f$. Kuvaus f on *suunnistuksen säilyttävä*, mikäli $\deg f \geq 0$. Mikäli $\deg f < 0$, niin kuvaus $f\colon (\mathcal{M}, -\mu_{\mathcal{M}}) \to (\mathcal{N}, \mu_{\mathcal{N}})$ on suunnistuksen säilyttävä. Näin ollen riittää tarkastella suunnistuksen säilyttäviä kuvauksia.

Huomautus 3.15. Huomaa, että alueen suunnistuksen määritelmän perusteella pätee, että mikäli $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ on suunnistuksen säilyttävä ja $U \subset \mathcal{M}$ on sellainen alue, että $f|_U\colon U \to fU$ on ankara kuvaus, niin $f|_U$ on suunnistuksen säilyttävä kuvaus. Tämä seuraa siitä, että annetussa tilanteessa pätee

$$(f|_U)^*(\mu_{fU}) = (f|_U)^*\tau_{fU,\mathcal{N}}(\mu_{\mathcal{N}}) = \tau_{U,\mathcal{M}}(f^*\mu_{\mathcal{N}}) = (\deg f)\mu_{\mathcal{M}}.$$

Työssä tutkitaan lähinnä kahden moniston välillä määritellyn avoimen kuvauksen f lokaaleja ominaisuuksia. Valitsemalla lähtömonistosta karttaympäristö U, jonka kuva fU sisältyy moniston $\mathcal{N}$ karttaympäristöön voidaan rajoittumaan siirtymällä olettaa, että $f|_U\colon U \to fU$ on kuvaus kahden suunnistetun moniston välillä. Kuvaus $f|_U$ ei kuitenkaan välttämättä indusoi kuvausta kompaktisti kannatettujen kohomologioiden välille, sillä sen ei tarvitse olla ankara kuvaus. Seuraava lemma antaa ehdon milloin rajoittuma $f|_U\colon U \to fU$ on ankara ja siten indusoi kuvauksen $(f|_U)^*\colon H_c^k(fU) \to H_c^k(U)$. Tulos on lemmaksi muotoiltu huomio lähteestä [Väi66, p. 5].

Lemma 3.16. *Olkoot $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ yhtenäisiä monistoja ja $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ jatkuva avoin kuvaus, $U \subset \mathcal{M}$ prekompakti alue ja $V \subset \mathcal{N}$ alue, joka toteuttaa ehdon $fU \cap V \neq \emptyset$. Tällöin rajoittuma*

$$f|_{(U \cap f^{-1}V)}\colon U \cap f^{-1}V \to V$$

on ankara, jos ja vain jos pätee $V \cap f\partial U = \emptyset$.

Todistus. Oletetaan, että $V \cap f\partial U = \emptyset$. Osoitetaan, että kuvaus $f|_{U\cap f^{-1}V}$ on ankara tekemällä vastaoletus, että alkukuva $(f|_{U\cap f^{-1}V})^{-1}K$ ei ole kompakti jollain kompaktilla joukolla $K \subset V$. Tällöin on olemassa sellainen jono (x_n) joukossa $(f|_{U\cap f^{-1}V})^{-1}K$, jolle pätee $x_n \to x_0 \in \partial U$. Tästä seuraa, että $f(x_n) \to f(x_0) \in f\partial U$. Näin ollen on voimassa $f(y_0) \in V \cap f\partial U$. Tämä on ristiriita, joten rajoittuma $f|_{U\cap f^{-1}V}$ on ankara kuvaus.

Oletetaan seuraavaksi, että pätee $V \cap f\partial U \neq \emptyset$ ja olkoon x jokin tämän joukon piste. Olkoon $r > 0$ sellainen säde, että $\overline{B}(x,r) \subset V$. Valitaan $y \in \partial U \cap f^{-1}\{x\}$. Joukko $f|_{(U\cap f^{-1}V)}^{-1}(\overline{B}(x,r))$ ei ole kompakti, jolloin kuvaus $f|_{(U\cap f^{-1}V)}$ ei ole ankara.

Tämä todistaa väitteen. □

Korollaari 3.17. *Olkoon $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ jatkuva avoin kuvaus ja $U \subset \mathcal{M}$ prekompakti alue. Tällöin kuvaus*

$$f|_{(U\cap f^{-1}V)}\colon U \cap f^{-1}V \to V$$

on ankara jokaisella joukon $\mathcal{N} \setminus f\partial U$ komponentilla V.

Jokainen joukon $\mathcal{N} \setminus f\partial U$ alue W sisältyy johonkin komponenttiin V. Tällöin myös kuvaus

$$f|_{(U\cap f^{-1}W)}\colon U \cap f^{-1}W \to W$$

on ankara. Prekompaktia aluetta $V \subset \mathcal{N} \setminus f\partial U$ kutsutaan (f,U)-*kelvolliseksi alueeksi* ja pisteen $y \in \mathcal{N}$ ympäristöä, joka on kelvollinen alue, (f,U)-*kelvolliseksi ympäristöksi*. Pistettä $y \in \mathcal{N}$, jolla on olemassa (f,U)-kelvollinen ympäristö, kutsutaan (f,U)-kelvolliseksi pisteeksi. Huomaa, että piste y on (f,U)-kelvollinen, jos ja vain jos pätee $y \notin f\partial U$. Jatkossa, jos $V \subset \mathcal{N}$ on (f,U)-kelvollinen alue, merkitään $V^{-1} := U \cap f^{-1}V$ merkintöjen yksinkertaistamiseksi.

Rajoittuman voi muodostaa myös lähtien maalimoniston alueesta.

Lemma 3.18. *Olkoon $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ jatkuva avoin kuvaus ja $V \subset \mathrm{Im}(f)$ prekompakti alue. Tällöin kuvaus $f|_U\colon U \to V$ on ankara jokaisella joukon $\mathcal{M} \setminus f^{-1}\partial V$ prekompaktilla komponentilla U jolle pätee $fU \cap V \neq \emptyset$. Erityisesti tällöin on voimassa $f\partial U = \partial fU$.*

Todistus. Huomataan ensin, että yhtenäisyyden nojalla $fU \subset V$. Toisaalta on voimassa $\partial U \subset f^{-1}\partial V$, joten pätee

$$f\partial U \subset ff^{-1}\partial V \subset \partial V. \tag{8}$$

Rajoittuma $f|_U\colon U \to V$ on surjektio, koska muuten joukon U reunapiste kuvautuisi joukon V sisäpisteelle, mikä on mahdotonta kaavan (8) nojalla. Erityisesti on voimassa $\partial V \subset \partial fU$. Täten siis

$$f\partial U \subset \partial V \subset \partial fU.$$

Koska f on avoin kuvaus, niin $\partial fU \subset f\partial U$. Täten pätee $f\partial U = \partial fU$.

Väitteen ensimmäinen osa seuraa nyt lemmasta 3.16 ja tiedosta $f\partial U = \partial fU$. □

Jatkossa prekompaktia aluetta $U \subset \mathcal{M}$ kutsutaan *normaalialueeksi kuvauksen f suhteen*, mikäli pätee $f\partial U = \partial fU$. Tällöin alue fU on (f,U)-kelvollinen alue ja erityisesti rajoittuma $f|_U \colon U \to fU$ on ankara. Pisteen ympäristöä, joka on normaalialue kutsutaan luonnollisesti *normaaliympäristöksi*. Jokaisella lähtömoniston $\mathcal{M}$ pisteellä x on mielivaltaisen pieniä prekompakteja normaaliympäristöjä, kun kuvaus f on haarautuva peitekuvaus. Tämä seuraa lemman 3.18 nojalla siitä, että kuvaus f ei ole diskreetti mikäli jollain pisteellä x on sellainen ympäristökanta $\{U_j \mid j \in \mathbb{N}\}$, että kaikilla $j \in \mathbb{N}$ on voimassa $\partial U_j \cap f^{-1}\{f(x)\} \neq \emptyset$.

Seuraavaksi määritellään kuvaukselle erilaisia lokaaleja aste-, sekä indeksikäsitteitä, jotka toimivat tässä työssä eräinä tärkeimpinä työkaluina haarautuvien peitekuvausten ja BLD-kuvausten lokaalien topologisten ominaisuuksien tutkimisessa.

Olkoon $f \colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ avoin jatkuva kuvaus ja $U \subset \mathcal{M}$ sellainen alue, että $f|_U \colon U \to fU$ on suunnistuksen säilyttävä ankara kuvaus. Kaikilla (f,U)-kelvollisilla alueilla V kuvaus

$$(\tau_{V^{-1},U}) \circ (f|_{V^{-1}})^* \colon H_c^n(V) \to H_c^n(U) \tag{9}$$

on muotoa $m\mu_V \mapsto km\mu_U$ jollain $k \in \mathbb{Z}$. Koska kuvaus $f|_U$ on suunnistuksen säilyttävä, niin luku k on ei-negatiivinen.

Huomautus 3.19. Myöhemmin lauseessa 4.6 todistetaan, että yllä olevassa tilanteessa $k \neq 0$, eli että suunnistuksen säilyttävillä haarautuvilla peitekuvauksilla on epätriviaali aste.

Määritelmä 3.20. Kaavan (9) kuvaukseen liittyvää vakiota k kutsutaan *kuvauksen f topologiseksi asteeksi ympäristön V suhteen* ja sitä merkitään

$$\mu(V,f,U) := k.$$

Olkoot V_1 ja V_2 kaksi (f,U)-kelvollista aluetta, joilla on yhteisiä pisteitä. Valitaan alue $W \subset V_1 \cap V_2$ ja muodostetaan kaavio

$$\begin{tikzcd}
& H_c^n(V_1) \\
H_c^n(U) \arrow[ur, bend left, "(f|_{V_1})^*"] \arrow[r, "(f|_W)^*"] \arrow[dr, bend right, "(f|_{V_2})^*"'] & H_c^n(W) \arrow[u, hook, "\tau_{W,V_1}"'] \arrow[d, hook, "\tau_{W,V_2}"] \\
& H_c^n(V_2)
\end{tikzcd}$$

joka kommutoi lemman 3.9 todistuksen nojalla. Nyt havaitaan, että pätee

$$\mu(V_1,f,U) = \mu(W,f,U) = \mu(V_2,f,U),$$

sillä alueiden inkluusiot ovat alueen suunnistuksen määritelmän perusteella suunnistuksen säilyttäviä kuvauksia ja niiden kohomologiaan indusoivat kuvaukset isomorfismeja lemman 3.13 nojalla. Täten (f,U)-kelvollisen alueen V valinta joukon $\mathcal{N} \setminus f\partial U$ komponentin sisältä ei vaikuta lukuun k. Jokainen (f,U)-kelvollinen piste y kuuluu yksikäsitteiseen joukon $\mathcal{N} \setminus f\partial U$ komponenttiin, joten kuvauksen f aste pisteessä y voidaan määritellä seuraavasti.

Määritelmä 3.21. Olkoot $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ avoin jatkuva kuvaus ja $U \subset \mathcal{M}$ sellainen prekompakti alue, että $f|_U\colon U \to fU$ on suunnistuksen säilyttävä ankara kuvaus. Olkoon $y \in \mathcal{N}$ (f, U)-kelvollinen piste ja $W \subset \mathcal{N} \setminus f\partial U$ komponentti joka sisältää pisteen y. *Kuvauksen f topologinen aste pisteessä y* määritellään asettamalla

$$\mu(y, f, U) = \mu(W, f, U).$$

Suoraan määritelmästä seuraa, että kuvaus $y \mapsto \mu(y, f, U)$ on vakio jokaisessa joukon $\mathcal{N} \setminus f\partial U$ komponentissa.

Tärkein topologisen indeksin käsittelyyn työssä käytettävistä tuloksista on seuraava, jonka antamaa kaavaa (10) ympäristöjen topologiselle asteelle kutsutaan jatkossa summakaavaksi.

Lause 3.22. *Olkoot U_0 alue, $f\colon U_0 \to \mathcal{N}$ jatkuva avoin kuvaus, $U_1, \ldots, U_k \subset U_0$ erillisiä avoimia joukkoja ja $V \subset \mathcal{N}$ alue, joka on (f, U_j)-kelvollinen jokaisella $j = 0, 1, \ldots, k$ ja jolle pätee*

$$(f^{-1}V) \cap U_0 \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_j.$$

Tällöin topologinen aste $\mu(V, f, U_0)$ voidaan laskea kaavalla

$$\mu(V, f, U_0) = \sum_{j=1}^{k} \mu(V, f, U_j). \tag{10}$$

Todistus. Merkitään $V_j^{-1} := U_j \cap f^{-1}V$, kun $j = 0, \ldots, k$. Nyt asteen määritelmän nojalla on voimassa

$$\begin{aligned}\mu(V, f, U_0)\mu_{U_0} &= (\tau_{V_0^{-1}, U_0}) \circ (f|_{V_0^{-1}})^* \mu_V \\ &= (\tau_{V_0^{-1}, U_0}) \left((f|_{V_0^{-1}})^* \mu_V \right).\end{aligned}$$

Lemman 3.5 nojalla pätee

$$(\tau_{V_0^{-1}, U_0}) \left((f|_{V_0^{-1}})^* \mu_V \right) = \sum_{j=1}^{k} (\tau_{V_0^{-1}, U_0}) \left((f|_{V_j^{-1}})^* \mu_V \right)$$

ja kaikilla $j = 1, \ldots, k$ on voimassa

$$\begin{aligned}(\tau_{V_0^{-1}, U_0}) \left((f|_{V_j^{-1}})^* \mu_V \right) &= (\tau_{V_j^{-1}, U_0}) \left((f|_{V_j^{-1}})^* \mu_V \right) \\ &= (\tau_{V_j^{-1}, U_0}) \circ (f|_{V_j^{-1}})^* \mu_V \\ &= (\tau_{U_j, U_0}) \circ (\tau_{V_j^{-1}, U_j}) \circ (f|_{V_j^{-1}})^* \mu_V \\ &= (\tau_{U_j, U_0}) \mu(V, f, U_j) \mu_{U_j} \\ &= \mu(V, f, U_j) \tau_{U_j, U_0}(\mu_{U_j}) \\ &= \mu(V, f, U_j) \mu_{U_0}.\end{aligned}$$

Täten pätee

$$\mu(V, f, U_0)\mu_{U_0} = \sum_{j=1}^{k} \mu(V, f, U_j) \mu_{U_0}.$$

Tämä todistaa väitteen. $\square$

Tarkastelemalla alueen topologisen asteen sijasta pisteen topologista astetta saadaan seuraava muotoilu äskeisestä lauseesta. Myös kaavaa (11) kutsutaan työssä summakaavaksi.

Korollaari 3.23. *Olkoot U_0 alue, $f\colon U_0 \to \mathcal{N}$ avoin jatkuva kuvaus, $U_1, \ldots, U_k \subset U_0$ erillisiä avoimia joukkoja ja $y \in \mathcal{N}$ piste, joka on (f, U_j)-kelvollinen piste kaikilla $j = 0, 1, \ldots, k$ ja jolle pätee $f^{-1}\{y\} \cap U_0 \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_j$. Tällöin saadaan yhtälö*

$$\mu(y, f, U_0) = \sum_{j=1}^{k} \mu(y, f, U_j). \tag{11}$$

Olkoot A_1 ja A_2 alueita suunnistetun moniston $\mathcal{M}$ alueessa U ja oletetaan, että $x \in A_1 \cap A_2$ on piste, jolle pätee

$$\overline{A_j} \cap f^{-1}\{f(x)\} = \{x\},$$

missä $j \in \{1, 2\}$. Tällöin x on sekä (f, A_1)- että (f, A_2)-kelvollinen ja korollaarin 3.23 perusteella

$$\mu(f(x), f, A_1) = \mu(f(x), f, U) = \mu(f(x), f, A_1).$$

Aste $\mu(f(x), f, U)$ ei siis riipu ympäristöstä U, jos pätee $x \in U$ ja

$$\overline{U} \cap f^{-1}\{f(x)\} = \{x\}.$$

Tällainen ympäristö löytyy aina, kun kuvaus on diskreetti ja avoin. Täten voidaan antaa seuraava määritelmä.

Määritelmä 3.24. Olkoon $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ haarautuva peitekuvaus kahden suunnistetun moniston välillä sekä $x \in \mathcal{M}$. Kuvauksen f *lokaali indeksi $i(x; f)$ pisteessä x* on aste $\mu(f(x), f, U)$, kun U on pisteen x prekompakti ympäristö, jolle pätee:

(i) Rajoittuma $f|_U\colon U \to fU$ on suunnistuksen säilyttävä kuvaus kahden suunnistetun moniston välillä.

(ii) Piste x on (f, U)-kelvollinen ja toteuttaa ehdon $\overline{U} \cap f^{-1}\{f(x)\} = \{x\}$.

Määritelmä 3.25. Kahden suunnistetun moniston $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ välistä haarautuvaa peitekuvausta $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ sanotaan *suunnistuksen säilyttäväksi*, mikäli kaikilla $x \in \mathcal{M}$ pätee $i(x : f) \geq 0$.

Soveltamalla summakaavaa (11) tilanteessa, jossa ympäristöt U_j, $j \geq 1$, ovat kuten määritelmässä 3.24, saadaan seuraava korollaari.

Korollaari 3.26. *Oletetaan korollaarin 3.23 oletuksien lisäksi, että joukoille U_j pätee*

$$\sharp(\overline{U_j} \cap f^{-1}\{y\}) \leq 1.$$

Tällöin on voimassa

$$\mu(y, f, U_0) = \sum_{z \in f^{-1}\{y\}} i(z; f). \tag{12}$$

Kaavaa (12) kutsutaan *indeksikaavaksi*.

Myöhempiä tuloksia varten otetaan käyttöön vielä yksi indeksikäsite, joka on luonteeltaan aikaisempia geometrisempi.

Määritelmä 3.27. Olkoon $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ avoin diskreetti kuvaus kahden moniston välillä ja $U \subset \mathcal{M}$ joukko. Kuvauksen f *geometrinen aste pisteen* $y \in \mathcal{N}$ *suhteen joukossa* U on

$$N(y, f, U) = \sharp(U \cap f^{-1}\{y\}) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Lisäksi merkitään $N(f, U) := \sup_{x\in U} N(f(x), f, U)$.

Indeksikaava (12) laskee pisteen y topologisen asteen $\mu(y, f, U)$ summana lokaaleista indekseistä $i(\,\cdot\,; f)$ ylitse joukon, joka antaa pisteen y geometrisen asteen $N(y, f, U)$. Myöhemmin lemmassa 4.7 saadaan tämän huomion avulla lokaali äärellinen yläraja haarautuvan peitekuvauksen lokaalille multiplisiteetille.

Seuraava lemma kertoo, että funktioina lokaali indeksi ja geometrinen aste käyttäytyvät komplementaarisella tavalla.

Lemma 3.28. *Olkoot $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ suunnistuksen säilyttävä haarautuva peitekuvaus kahden suunnistetun moniston välillä ja $U \subset \mathcal{M}$ prekompakti alue. Tällöin*

(a) kuvaus $x \mapsto i(x; f)$ on ylhäältä puolijatkuva, ja

(b) kuvaus $x \mapsto N(f(x), f, U)$ on alhaalta puolijatkuva.

Todistus. Olkoot $x_0 \in \mathcal{M}$ ja (x_n) jono, joka suppenee kohti pistettä x_0. Todistetaan, että tällöin on voimassa

$$i(x_0; f) \geq \limsup_{n\to\infty} i(x_n; f). \tag{13}$$

Olkoon U pisteen x_0 normaaliympäristö, jolle pätee $\overline{U} \cap f^{-1}\{f(x_0)\} = \{x_0\}$. Nyt on voimassa $i(x_0; f) = \mu(f(x_0), f, U)$, ja on olemassa sellainen $n_0 > 0$, että pätee $x_n \in U$ kaikilla $n \geq n_0$. Kaikilla $n \geq n_0$ saadaan epäyhtälöketju

$$i(x_0; f) = \mu(f(x_0), f, U) = \mu(f(x_n), f, U) = \sum_{z\in U\cap f^{-1}\{f(x_n)\}} i(z; f) \geq i(x_n; f).$$

Tämä todistaa epäyhtälön (13), josta puolestaan seuraa, että kuvaus $x \mapsto i(x; f)$ on ylhäältä puolijatkuva.

Todistetaan seuraavaksi kohta (b). Koska joukko U on prekompakti, niin geometrinen aste $N(f(x_0), f, U)$ on äärellinen. Täten voidaan valita erilliset ympäristöt $U_0, \ldots, U_k$ joukon $U \cap f^{-1}\{f(x_0)\}$ pisteille $\{y_0, \ldots, y_k\}$. Olkoon

$$V := U_0 \cap f^{-1} \bigcap_j fU_j.$$

Tällöin kaikilla pisteillä $x \in V$ pätee epäyhtälö

$$N(f(x), f, U) \geq N(f(x_0), f, U).$$

Tämä todistaa väitteen. $\square$

Kappaleen viimeisinä tuloksina tarkastellaan topologisen indeksin rajakäyttäytymisestä.

Lemma 3.29. *Olkoot $U, W \subset \mathbb{R}^n$ sellaisia prekompakteja alueita, että $\overline{U} \subset W$, ja olkoot $f, g\colon W \to \mathbb{R}^n$ avoimia jatkuvia kuvauksia, joille pätee $fU \cap gU \neq \emptyset$. Olkoon $V \subset fU \cap gU$ avoin joukko, joka toteuttaa ehdon*

$$\min(d(V, f\partial U), d(V, g\partial U)) \geq 2\|f - g\|_\infty. \tag{14}$$

Tällöin V on sekä (f, U)- että (g, U)-kelvollinen alue ja pätee

$$\mu(V, f, U) = \mu(V, g, U).$$

Todistus. Oletuksista seuraa suoraan, että V on sekä (f, U)-kelvollinen että (g, U)-kelvollinen alue. Olkoon $F\colon U \times I \to \mathbb{R}^n$ janahomotopia

$$(x, t) \mapsto tf(x) + (1 - t)g(x).$$

Ehdon (14) perusteella pätee

$$V \cap F\partial(U \times I) = \emptyset.$$

Täten kuvaus $F|_{F^{-1}V \cap U \times I}$ on ankara. Nyt lauseen 3.7 perusteella

$$(\tau_{U \cap f^{-1}V, U}) \circ (f|_{f^{-1}V \cap U})^* = (\tau_{U \cap g^{-1}V, U}) \circ (g|_{f^{-1}V \cap U})^*,$$

eli erityisesti pätee $\mu(V, f, U) = \mu(V, g, U)$ kuten haluttiin. □

Seuraava lause on luonteeltaan eräänlainen Hurwitzin lause.

Lause 3.30. *Olkoon (f_j) jono haarautuvia peitekuvauksia $B^n \to \mathbb{R}^n$, joka suppenee tasaisesti kompakteissa joukoissa kohti haarautuvaa peitekuvausta $g\colon B^n \to \mathbb{R}^n$. Tällöin kaikilla pisteillä $x_0 \in B^n$ pätee*

$$\lim_{j \to \infty} \mu(g(x_0), f_j, U) = \mu(g(x_0), g, U),$$

missä U on pisteen x_0 normaaliympäristö kuvauksen g suhteen, jolle pätee $\overline{U} \subset B^n$.

Todistus. Olkoot $x_0 \in B^n$ ja U sellainen pisteen x_0 normaaliympäristö kuvauksen g suhteen, että on voimassa $\overline{U} \subset B^n$. Tällöin pätee $R := d(g(x_0), g\partial U) > 0$. Olkoon j_0 niin suuri, että epäyhtälö $\|g - f_j\|_\infty < \frac{R}{4}$ on voimassa kaikilla $j \geq j_0$. Nyt saadaan epäyhtälöt

$$d(g(x_0), f_j\partial U) \geq \frac{3R}{2} \quad \text{ja} \quad d(f_j(x_0), g(x_0)) \leq \frac{R}{4}$$

kaikilla $j \geq j_0$. Tästä seuraa, että kaikilla $j \geq j_0$ pätee $B(g(x_0), \frac{3R}{4}) \subset f_jU$. Täten avoin joukko

$$V := B\left(g(x_0), \frac{R}{4}\right)$$

on (g, U)-kelvollinen ja (f_j, U)-kelvollinen kaikilla $j \geq j_0$. Lemman 3.29 perusteella kaikilla $j \geq j_0$ pätee yhtälö $\mu(V, g, U) = \mu(V, f_j, U)$. Tämä todistaa väitteen, sillä pisteet $f_j(x_0)$ ja $g(x_0)$ sisältyvät joukkoon V kaikilla $j \geq j_0$. □

4 Haarautuvien peitekuvausten perusominaisuuksista

Tässä luvussa todistetaan muutamia aputuloksia haarautuvien peitekuvausten perusominaisuuksista.

4.1 Haarajoukon topologisista ominaisuuksista

Tässä kappaleessa todistetaan, että haarautuvan peitekuvauksen haarajoukko on sisäpisteetön eikä separoi monistoa lokaalisti missään pisteessä. Tulos todistettiin alunperin lähteessä [Čer64], mutta todistusta yksinkertaistettiin noin vuosi myöhemmin lähteessä [Väi66]. Tuloksesta seuraa erityisesti, että haarajoukon komplementti on suoristuvasti yhtenäinen polkumetrisillä monistoilla. Haarajoukon ominaisuuksien todistukset seuraavat pääosin lähdettä [Väi66].

Haarajoukon sisäpisteettömyys on luonteeltaan geometrinen ominaisuus ja suoraviivainen todistaa.

Lemma 4.1. *Olkoon $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ haarautuva peitekuvaus kahden moniston välillä ja $x \in \mathrm{B}_f$. Tällöin pisteen x jokaiselle normaaliympäristölle U, jolle pätee $N(f,U) < \infty$ on voimassa*

$$N(f(x), f, U) < N(f, U) < \infty.$$

Todistus. Olkoon U jokin pisteen x normaaliympäristö, jolle pätee $N(f,U) < \infty$. Tehdään vastaoletus, että pisteen $x \in \mathrm{B}_f$ kuvalla $f(x)$ olisi maksimaalinen geometrinen aste alueessa U. Valitaan erilliset ympäristöt $U_j \subset U$ joukon

$$f^{-1}\{f(x)\} \cap U$$

pisteille $x_1, \ldots, x_k$. Voidaan olettaa, että $x_1 = x$. Merkitään

$$V = U_1 \cap f^{-1}\left(\bigcap_j fU_j\right).$$

Tällöin kaikilla $y \in V$ pätee $U_j \cap f^{-1}\{f(y)\} \neq \emptyset$ kaikilla $j = 1, \ldots k$. Koska pisteen x geometrinen indeksi on maksimaalinen, pätee $N(f(y), f, V) = 1$ kaikilla $y \in V$. Täten kuvaus $f|_V$ on injektio ja siten lokaali homeomorfismi pisteessä x, mikä on ristiriita. □

Lause 4.2. *Olkoon $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ haarautuva peitekuvaus kahden moniston välillä. Tällöin joukolla B_f ei ole sisäpisteitä.*

Todistus. Tehdään vastaoletus, että joukko B_f sisältää prekompaktin avoimen joukon V. Koska kuvaus f on diskreetti ja ympäristö V prekompakti, niin kaikilla $x \in V$ on voimassa $N(f(x), f, V) < \infty$. Joukko V voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä

$$V = \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j,$$

missä joukot

$$V_j := \{x \in V \mid N(f(x), f, V) \leq j\}$$

ovat suljettuja lemman 3.28 nojalla. Täten Bairen lauseen nojalla on olemassa sellainen $j_0 \in \mathbb{N}$, että joukolla V_{j_0} on sisäpisteitä. Valitaan tämän joukon V_{j_0} sisältä jokin normaaliympäristö U. Koska pätee $N(f, U) \leq j < \infty$, niin kuvaus $z \mapsto N(z, f, U)$ saavuttaa joukossa U suurimman arvonsa. Tämä on ristiriidassa lemman 4.1 kanssa. Joukolla B_f ei siis ole sisäpisteitä. □

Seuraavaksi todistetaan, ettei haarautuvan peitekuvauksen haarajoukko voi separoida lähtömonistoa missään pisteessä, eli että kaikilla pisteillä $p \in \mathrm{B}_f$ ja alueilla $D \ni p$ joukko $D \setminus \mathrm{B}_f$ on yhtenäinen. Todistuksen ideana on näyttää, että jos haarajoukko separoi moniston $\mathcal{M}$ lokaalisti jossain pisteessä, niin löytyy alue D ja haarajoukon sulkeuman sellainen osajoukko A, että $D \setminus A$ koostuu kahdesta komponentista, jotka f kuvaa homeomorfisesti samalle alueelle D'. Tällöin joukko $A \cap D$ kuvautuu alueen D' reunalle vaikka se sisältää välttämättä alueen D sisäpisteen. Tämä on mahdotonta, sillä kuvaus $f|_D$ on avoin kuvaus.

Aloitetaan todistamalla muutama aputulos. Seuraava lemma todistuksineen on lähteestä [Väi66, Lemma 5.2.].

Lemma 4.3. *Olkoot $U_1, U_2 \subset \mathcal{M}$ erillisiä alueita, joille pätee $\partial U_1 = \partial U_2$ ja $\overline{U_1} \cup \overline{U_2} \neq \mathcal{M}$. Tällöin ei ole olemassa homeomorfismia $f \colon \overline{U_1} \to \overline{U_2}$, jolle pätee $f|_{\partial U_1} = \mathrm{id}$.*

Todistus. Tehdään vastaoletus: on olemassa homeomorfismi $f \colon \overline{U_1} \to \overline{U_2}$, jolle pätee $f|_{\partial U_1} = \mathrm{id}$.

Korollaarin 3.10 nojalla jono

$$\cdots \longrightarrow H_c^{n-1}(\partial(U_1 \cup U_2)) \xrightarrow{d} H_c^n(U_1 \cup U_2) \longrightarrow H_c^n(\overline{U_1 \cup U_2}) \longrightarrow \cdots$$

on eksakti ja lemman 3.13 nojalla $H_c^n(\overline{U_1 \cup U_2}) = 0$. Koska alueet U_1 ja U_2 ovat erillisiä, mutta niillä on sama reuna, niin pätee $\partial U_1 = \partial(U_1 \cup U_2)$. Tästä saadaan eksakti jono

$$\cdots \longrightarrow H_c^{n-1}(\overline{U_1 \cup U_2}) \longrightarrow H_c^{n-1}(\partial U_1) \xrightarrow{d} H_c^n(U_1 \cup U_2) \longrightarrow 0,$$

josta seuraa, että homomorfismi d on surjektio.

Korollaarin 3.10 nojalla jonot

$$\cdots \longrightarrow H_c^{n-1}(\partial U_i) \xrightarrow{d_i} H_c^n(U_i) \longrightarrow H_c^n(\overline{U_i}) \longrightarrow H_c^{n+1}(\partial U_i) \longrightarrow \cdots,$$

missä $i \in \{1, 2\}$, ovat eksakteja. Kuvauksen f rajoittuma joukkoon U_1 määrittelee homeomorfismin $g = f|_{U_1} \colon U_1 \to U_2$. Täten saadaan kommutoiva kaavio

$$\begin{tikzcd}
H_c^{n-1}(\partial U_1) \arrow[r, "d_1"] & H_c^n(U_1) \\
H_c^{n-1}(\partial U_2) \arrow[r, "d_2"] \arrow[u, "\mathrm{id}"] & H_c^n(U_2), \arrow[u, "g^*"']
\end{tikzcd}$$

missä kuvaus g^* on isomorfismi. Erityisesti $d_1 = g^* \circ d_2$.

Koska alueet U_1 ja U_2 ovat erillisiä, niin joukko U_i on suljettu avaruudessa $U_1 \cup U_2$, jolloin inkluusio $\iota_i \colon U_i \hookrightarrow U_1 \cup U_2$ indusoi homomorfismin

$$\iota_i^* \colon H_c^n(U_1 \cup U_2) \to H_c^n(U_i),$$

kun $i \in \{1, 2\}$. Täten saadaan aikaan kaksi kommutoivaa kaaviota

$$\begin{tikzcd} H_c^{n-1}(\partial U_1) \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "d_i"'] & H_c^n(U_1 \cup U_2) \arrow[d, "\iota_i^*"] \\ & H_c^n(U_i), \end{tikzcd}$$

missä $i \in \{1, 2\}$. Koska alueet U_1 ja U_2 ovat erillisiä, niin ryhmä $H_c^n(U_1 \cup U_2)$ on isomorfinen ryhmän $H_c^n(U_1) \oplus H_c^n(U_2)$ kanssa ja kuvaus

$$(\iota_1^* \oplus \iota_2^*) \colon H_c^n(U_1 \cup U_2) \to H_c^n(U_1) \oplus H_c^n(U_2)$$

on isomorfismi. Näin ollen

$$d(a) = (d_1(a), d_2(a)) = (g^* \circ d_2(a), d_2(a)).$$

Tämä on ristiriita, sillä homomorfismi d on surjektio, mutta se ei voi saada arvoja jotka ovat muotoa $(b, 0)$, missä $b \neq 0$. Täten väite on todistettu. $\square$

Lemma 4.4. *Olkoot $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ suunnistettuja monistoja sekä $f \colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ suljettu haarautuva peitekuvaus, jolle pätee $N(f, \mathcal{M}) < \infty$. Olkoon lisäksi $A \subset \mathcal{M}$ suljettu joukko, jolle $\mathcal{M} \setminus A$ on epäyhtenäinen ja kaikilla $x \in A$ on voimassa $N(f(x), f, \mathcal{M}) = 1$. Tällöin jokainen joukon $\mathcal{M} \setminus A$ komponentti U kuvautuu surjektiivisesti jollekin joukon $\mathcal{N} \setminus fA$ komponentille V. Rajoittuma $f|_U \colon U \to U$ on tällöin suljettu kuvaus ja kaikilla $y \in V$ on voimassa $\mu(y, f, U) = \pm 1$.*

Todistus. Koska f on jatkuva ja $f^{-1}fA = A$, sisältyy jokainen joukon $\mathcal{M} \setminus A$ komponentti U johonkin joukon $\mathcal{N} \setminus fA$ komponenttiin V. Olkoon E joukon U suljettu osajoukko. Tällöin pätee $E = \overline{E} \cap U$, missä sulkeuma $\overline{E}$ otetaan moniston $\mathcal{M}$ suhteen. Oletuksista seuraa, että kuvaus f on suljettu, joten joukko $f\overline{E} \cap V$ on suljettu komponentissa V. Selvästi on voimassa $fE \subset f\overline{E} \cap V$. Lisäksi pätee $V \cap fA = \emptyset$, joten on voimassa $f\overline{E} \cap V \subset fE$. Täten joukko $fE = f\overline{E} \cap V$ on suljettu komponentissa V, eli kuvaus $f|_U \colon U \to V$ on suljettu. Koska kuvaus f on avoin, pätee $fU = V$, eli rajoittuma $f|_U \colon U \to V$ on myös surjektio. Surjektiivisena haarautuvana peitekuvauksena, jolle pätee $N(f, U) < \infty$, rajoittuma $f|_U \colon U \to V$ on ankara kuvaus.

Osoitetaan seuraavaksi, että rajoittuma $f|_{\partial U} \colon \partial U \to \partial V$ on homeomorfismi. Koska $N(f(x), f, \mathcal{M}) = 1$ kaikilla $x \in A$, niin rajoittuma $f|_A$ on injektio. Koska $\partial U \subset A$, niin myös rajoittuma $f|_{\partial U}$ on injektio. Täten riittää näyttää, että rajoittuma $f|_{\partial U} \colon \partial U \to \partial V$ on surjektio, sillä se on tällöin bijektiivinen avoin ja suljettu jatkuva kuvaus ja täten homeomorfismi. Koska pätee

$$V \cap f\partial U \subset V \cap fA = \emptyset,$$

niin on voimassa $f\partial U \subset \partial V$. Toisaalta, koska f on suljettu ja $fU = V$, niin $f\overline{U} = \overline{V}$. Täten

$$\partial V = f\overline{U} \setminus fU \subset f\partial U.$$

Täten $f\partial U = \partial V$ ja rajoittuma $f|_{\partial U} \colon \partial U \to \partial V$ on homeomorfismi.

Väitteen $\mu(y, f, U) = \pm 1$ todistamiseksi kaikilla $y \in V$ riittää osoittaa, että rajoittuman $g := f|_U \colon U \to V$ indusoima kuvaus $g^* \colon H^n_c(V) \to H^n_c(U)$ on surjektio, sillä surjektiivinen homomorfismi $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ on välttämättä isomorfismi. Merkitään $h := f|_{\partial U} \colon \partial U \to \partial V$. Yhdistämällä pitkään eksaktiin jonoon (7) kuvausten g sekä h indusoimat homomorfismit saadaan seuraava kommutoiva kaavio:

$$\begin{tikzcd}
H^{n-1}_c(\partial U) \arrow[r, "d"] & H^n_c(U) \arrow[r] & H^n_c(\overline{U}) \\
H^{n-1}_c(\partial V) \arrow[r] \arrow[u, "h^*"] & H^n_c(V) \arrow[u, "g^*"] &
\end{tikzcd}$$

Lemman 3.13 nojalla pätee $H^n_c(\overline{U}) = 0$, joten kuvaus d on surjektio. Koska kaavio kommutoi ja kuvaus h^* on homeomorfismin indusoimana kuvauksena isomorfismi, on kuvaus g^* välttämättä surjektio. Tämä todistaa väitteen. □

Todistetaan seuraavaksi tämän kappaleen päätulos.

Lause 4.5. *Olkoon $f \colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ haarautuva peitekuvaus kahden moniston välillä. Tällöin kuvauksen f haarajoukko B_f ei separoi lokaalisti lähtömonistoa $\mathcal{M}$ missään pisteessä.*

Todistus. Tehdään vastaoletus: joukko B_f separoi moniston $\mathcal{M}$ lokaalisti jossain pisteessä. Tällöin on olemassa moniston $\mathcal{M}$ prekompakti alue X, jonka haarajoukko B_f separoi lokaalisti jossain pisteessä. Erityisesti joukko

$$S_f = \{x \in X \cap \mathrm{B}_f \mid \text{ joukko } \mathrm{B}_f \text{ separoi alueen } X \text{ lokaalisti pisteessä } x\}$$

on epätyhjä. Olkoon S joukon S_f X-sulkeuma, eli $S = \overline{S_f} \cap X$.

Koska X on prekompakti, niin pätee $N(f(x), f, X) < \infty$ kaikilla $x \in X$. Suljettu joukko S voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä

$$S = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j,$$

missä joukot

$$S_j := \{x \in S \mid N(f(x), f, V) \leq j\}$$

ovat suljettuja lemman 3.28 nojalla. Täten Bairen lauseen nojalla on olemassa sellainen $j_0 \in \mathbb{N}$, että joukolla S_{j_0} on sisäpisteitä joukon S suhteen. Täten on olemassa sellainen alue $G \subset X$, että joukolla $A := G \cap S \subset S_{j_0}$ on sisäpisteitä joukon S suhteen ja erityisesti pätee $N(x, f, G) \leq j_0$ kaikilla $x \in S$.

Voidaan siis valita piste $x_1 \in A$, jonka geometrinen indeksi $N(f(x_1), f, G)$ on maksimaalinen joukossa A. Olkoon nyt $f^{-1}\{f(x_1)\} = \{x_1, \ldots, x_j\}$. Valitaan pisteille x_i, $i \in \{1, \ldots, j\}$ erilliset ympäristöt V_i ja merkitään

$$V := V_1 \cap f^{-1}\left(\bigcap_i fV_i\right).$$

Nyt on voimassa $N(f(x_1), f, V) = 1$. Koska pisteellä x_1 on maksimaalinen geometrinen indeksi joukossa A, niin $N(f(x), f, V) = 1$ pätee kaikilla $x \in A \cap V$; vertaa lemman 4.1 todistus.

Joukko $A \cap V =: A'$ sisältää määritelmänsä nojalla pisteen p, jossa joukko A' separoi joukon G lokaalisti. Olkoon siis $D \subset G$ pisteen p sellainen yhtenäinen normaaliympäristö kuvauksen f suhteen, että $D \setminus A'$ on epäyhtenäinen. Nyt voidaan soveltaa lemmaa 4.4, jonka mukaan kuvaus f rajoittuu homeomorfismiksi joukossa A' ja kuvaa kaikki joukon $D \setminus A'$ komponentit homeomorfisesti joukon $fD \setminus f(D \cap A')$ komponenteille.

Koska piste p kuuluu haarajoukkoon, niin kuvaus $f|_D$ ei voi olla pisteessä p lokaalisti injektiivinen lauseen 2.8 nojalla. Täten löytyy kaksi joukon $D \setminus A'$ komponenttia U_1 ja U_2, joiden kuvajoukot fU_1 ja fU_2 leikkaavat. Koska lemman 4.4 nojalla kuvaus f kuvaa joukon $D \setminus A'$ komponentit homeomorfisesti joukon $fD \setminus fA'$ komponenteille, ovat kuvajoukot fU_1 ja fU_2 välttämättä samat. Lisäksi koska kuvauksen f rajoittuma joukkoon A' on homeomorfismi, on kuvaus

$$(f|_{\overline{U_2} \cap D})^{-1} \circ (f|_{\overline{U_1} \cap D}) \colon \overline{U_1} \cap D \to \overline{U_2} \cap D$$

myös homeomorfismi, jonka rajoittuma reunalle on identtinen kuvaus. Täten lemman 4.3 nojalla alueet U_1 ja U_2 ovat ainoat joukon $D \setminus A'$ komponentit.

Tämä on ristiriita, sillä nyt joukossa $fD \setminus f(D \cap A')$ on vain yksi komponentti, jolle alueet U_i kuvautuvat homeomorfisesti. Erityisesti alueen D sisäpisteisiin sisältyvä joukko $A \cap D$ kuvautuu alueen fD reunalle, mikä on mahdotonta, koska kuvaus $f|_U$ on avoin. $\square$

Haarajoukon kuvan topologisista ominaisuuksista

Haarautuvan peitekuvauksen haarajoukon kuva on myöskin sisäpisteetön eikä separoi monistoa lokaalisti. Tätä tulosta ei käytetä jatkossa, mutta seuraavassa käydään läpi väitteen todistus. Mikäli X on topologinen avaruus, niin avaruuden X *kohomologiseksi dimensioksi* (kohomologiateorian $H^*(\cdot)$ suhteen) sanotaan pienintä lukua $k \in \mathbb{N}$, jolle pätee $H^{j+1}(K) = 0$ kaikilla $j \geq k$ ja kaikilla kompakteilla joukoilla $K \subset X$.

Koska haarajoukko on sisäpisteetön eikä separoi lokaalisti lähtömonistoa, niin lauseen [Bor60, I.4.9.b] nojalla sen kohomologinen dimensio Alexander-Spanier-kohomologian suhteen on enintään $n-2$. Koska sekä Alexander-Spanier-, että Čech-kohomologia ovat kummatkin lyhdekohomologioita ([War83, Chapter 5]), niin tuloksen [War83, Corollary, s. 184] nojalla kohomologinen dimensio Alexander-Spanier -kohomologian suhteen on sama kuin kohomologinen dimensio Čech-kohomologian suhteen. Edelleen kohomologinen dimensio Čech-kohomologian suhteen on haarajoukon tilanteessa lähteen [Eng78, s. 95] nojalla sama kuin peitedimensio, joka puolestaan yhtyy topologiseen dimensioon lauseen [Eng78, Proposition 1.6.9.] nojalla. Erityisesti siis haarajoukon topologinen dimensio $\dim_{\mathcal{T}}(B_f)$ on enintään $n-2$.

Koska on voimassa $\dim_{\mathcal{T}}(\mathrm{B}_f) \leq n-2$, niin lauseen [CH60, Lemma 2.1.] nojalla pätee $\dim_{\mathcal{T}}(f\,\mathrm{B}_f) \leq n-2$. Topologisen dimension määritelmästä seuraa, että joukolla $f\,\mathrm{B}_f$ ei täten ole sisäpisteitä, ja soveltamalla lausetta [HW41, Theorem IV.4., s. 48] huomataan, ettei haarajoukon kuva separoi lokaalisti maalimonistoa.

4.2 Haarautuvan peitekuvauksen topologisesta asteesta

Käyttämällä edellisessä kappaleessa haarajoukolle todistettuja ominaisuuksia saadaan lisää tietoa haarautuvien peitekuvausten geometriasta.

Lause 4.6. *Olkoon $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ suunnistuksen säilyttävä haarautuva peitekuvaus kahden suunnistetun n-moniston välillä, $U \subset \mathcal{M}$ prekompakti epätyhjä alue ja $V \subset \mathcal{N}$ (f, U)-kelvollinen alue. Tällöin $\mu(V, f, U) > 0$.*

Todistus. Merkitään $g := f|_U\colon U \to fU$. Kappaleen 4.1 huomioiden nojalla tiedetään, että joukko $fB_f \subset \mathcal{N}$ on sisäpisteetön eikä separoi monistoa $\mathcal{N}$ lokaalisti. Koska ympäristö U on prekompakti ja joukko B_f on suljettu, niin joukko $f[B_f \cap \overline{U}]$ on kompaktin joukon kuvana suljettu. Tästä seuraa, että joukko gB_g on suljettu joukossa fU. Lisäksi kuvauksen topologista astetta pisteen suhteen määriteltäessä huomattiin, että (f, U)-kelvollisen alueen V valinta joukon $\mathcal{N} \setminus f\partial U$ komponentin sisältä ei vaikuta topologiseen asteeseen. Täten voidaan olettaa, että $V \cap gB_g = \emptyset$. Edelleen voidaan olettaa, että alue V on sellainen, että kuvauksen g rajoittuma joukon $g^{-1}V$ mihin tahansa komponenttiin U_j, $j = 1, \ldots, k$, on homeomorfismi.

Nyt kaavan (10) nojalla aste $\mu(V, f, U)$ voidaan laskea homeomorfisten rajoittumien $f|_{U_j}\colon U_j \to V$ asteiden summana. Homeomorfismin topologinen aste on ± 1 ja koska haarajoukko ei separoi lokaalisti lähtöjoukkoa, ei aste voi vaihtaa merkkiä. Täten $\mu(V, f, U) \geq 1$, sillä kuvaus oletettiin suunnistuksen säilyttäväksi, ja väite on todistettu. $\square$

Yhdistämällä lause 4.6 sekä summakaava (11) nähdään, että suunnistuksen säilyttävälle kuvaukselle pätee seuraava lemma, joka antaa yhteyden haarautuvan peitekuvauksen topologian ja geometrian välille.

Lemma 4.7. *Olkoon $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ suunnistuksen säilyttävä haarautuva peitekuvaus kahden suunnistetun moniston välillä. Mikäli $U \subset \mathcal{M}$ on alue, niin pätee*

$$\mu(f(x), f, U) \geq N(f(y), f, U) \quad \text{ja} \quad \mu(f(x), f, U) \geq i(x; f),$$

kun $f(x)$ on (f, U)-kelvollinen piste. Jos lisäksi $N(f(x), f, U) = 1$, niin

$$\mu(f(x), f, U) = i(x; f).$$

Toisaalta, jos $i(x; f) = 1$ pätee kaikilla $x \in f^{-1}\{y\} \cap U$, niin on voimassa $\mu(y, f, U) = N(y, f, U)$.

Seuraavaksi karakterisoidaan haarautuvan peitekuvauksen haarajoukko indeksin avulla.

Lemma 4.8. *Piste x kuuluu suunnistuksen säilyttävän haarautuvan peitekuvauksen f haarajoukkoon, jos ja vain jos pätee $i(x; f) > 1$.*

Todistus. Koska kuvaus f on avoin, niin lauseen 2.8 perusteella f on pisteessä x lokaali homeomorfismi, jos ja vain jos se on pisteessä x lokaali injektio.

Oletetaan ensin, ettei kuvaus f ole lokaali injektio pisteessä x. Tällöin kaikilla $x \in \mathrm{B}_f \cap U$ pätee lemman 4.7 nojalla

$$\mu(f(x), f, U) = \mu(y, f, U) \geq N(y, f, U) \geq 2,$$

kun y on pisteen $f(x)$ (f,U)-kelvollisessa ympäristössä oleva piste, jolla on enemmän kuin yksi alkukuva. Toisaalta, jos f on lokaali homeomorfismi jossain pisteen x ympäristössä U, niin $f|_U \colon U \to fU$ indusoi isomorfismin $H^n_c(fU) \to H^n_c(U)$. Tällöin fU on triviaalisti (f,U)-kelvollinen ympäristö pisteelle $f(x)$, joten pätee $\mu(f(x), f, U) = 1$.

Tämä todistaa väitteen. □

Yhdistämällä lemman 4.8 ja lemman 4.7 huomiot nähdään, että kaikilla $y \notin f\,\mathrm{B}_f$ pätee

$$\mu(y, f, U) = N(y, f, U),$$

kun y on (f,U)-kelvollinen piste. Koska kappaleen 4.1 nojalla haarajoukon kuva on sisäpisteetön, pätee haarautuvalle peitekuvaukselle

$$\mu(y, f, U) = \sup_{z \in V} N(z, f, U), \tag{15}$$

kun V on pisteen y mikä tahansa (f,U)-kelvollinen ympäristö.

Seuraava korollaari seuraa välittömästi yhdistämällä lause 3.30 ja lemma 4.8.

Korollaari 4.9. *Olkoon (f_j) jono haarautuvia peitekuvauksia $B^n \to \mathbb{R}^n$, joka suppenee tasaisesti kompakteissa joukoissa kohti haarautuvaa peitekuvausta $g \colon B^n \to \mathbb{R}^n$. Mikäli kuulan B^n suppenevalle jonolle (x_n) pätee $x_j \in \mathrm{B}_{f_j}$ äärettömän monella $j \in \mathbb{N}$, niin*

$$\lim_{j\to\infty} x_j \in \mathrm{B}_g\,.$$

4.3 Polkujen nostaminen

Tässä kappaleessa todistetaan BLD-kuvauksiin liittyviä polunnosto-ominaisuuksia. BLD-kuvauksilla voi nimittäin nostaa polkuja hieman peitekuvausten tapaan: erona peitekuvauksiin on kuitenkin se, ettei nostojen tarvitse olla yksikäsitteisiä. Olkoon $t > 0$ ja Δ_t kumpi tahansa väleistä $[0,t)$ tai $[0,t]$.

Määritelmä 4.10. Olkoot $\mathcal{M}$ monisto, $0 < s \leq t$, sekä $\gamma \colon [0,t] \to \mathcal{M}$. Polku $\alpha \colon \Delta_s \to \mathcal{M}$ on polun γ *nosto* pisteestä $x \in f^{-1}\{a\}$, jos pätee $f \circ \alpha = \gamma|_{\Delta_s}$ ja $\alpha(0) = x$.

Nosto $\alpha \colon \Delta_s \to \mathcal{M}$ on *maksimaalinen*, mikäli ei ole olemassa polun γ nostoa $\alpha' \colon \Delta_{s'} \to \mathcal{M}$, jolle pätee $\alpha'|_{\Delta_s} = \alpha$ kun $\Delta_s \subsetneq \Delta_{s'}$.

Määritelmä 4.11. Olkoot $x_1, \ldots, x_k \in f^{-1}\{a\}$ erillisiä pisteitä. Kokoelmaa polkuja $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ on sanotaan *maksimaaliseksi kokoelmaksi polun γ nostoja pisteistä* $\{x_1, \ldots, x_k\}$, mikäli

(i) jokainen polku α_j on polun γ maksimaalinen nosto jostain pisteestä x_i,

(ii) kaikilla j on voimassa $\sharp\{j \mid \alpha_j(0) = x_i\} = i(x_i; f)$,

(iii) kaikilla $x \in \mathcal{M}$ ja kaikilla t on voimassa $\sharp\{j \mid \alpha_j(t) = x\} \leq i(x; f)$.

Seuraava lause on kirjan [Ric93] lause 3.22. Todistus perustuu polkujen lokaaliin nostamiseen ja päätekniikkana käytetään induktiota pisteiden lokaalin indeksin suhteen.

Lause 4.12. *Olkoon $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ haarautuva peitekuvaus kahden moniston välillä, a ja b moniston $\mathcal{N}$ kaksi pistettä ja $\gamma\colon a \curvearrowright b$ polku. Tällöin millä tahansa kokoelmalla erillisiä pisteitä $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset f^{-1}\{a\}$ on olemassa maksimaalinen kokoelma nostoja.*

Korollaari 4.13. *Olkoot $\mathcal{M}$ täydellinen polkumetrinen monisto, $\mathcal{N}$ monisto, $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ BLD-kuvaus, $\gamma\colon a \curvearrowright b$ polku, joka yhdistää kaksi moniston $\mathcal{N}$ pistettä sekä $x \in f^{-1}\{a\}$. Tällöin on olemassa polun γ maksimaalinen nosto $\widetilde{\gamma}\colon [0,1] \to \mathcal{M}$, jolle pätee $\widetilde{\gamma}(0) = x$ ja $f \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$.*

Todistus. Väite seuraa siitä, että lähtömoniston ollessa täydellinen, on maksimaalisen noston määrittelyjoukon oltava suljettu väli. Toisaalta suljetulla välillä määriteltyä polun nostoa voidaan jatkaa lauseen 4.12 nojalla, joten korollaarin tilanteessa maksimaalinen nosto toteuttaa halutut ehdot. □

Korollaarissa 4.13 mainittua nostoa kutsutaan jatkossa *täydelliseksi nostoksi.*

5 Konvergenssituloksia

Tässä kappaleessa todistetaan BLD-kuvausten rajakäyttäytymiseen liittyviä tuloksia. Korollaarina saadaan lause, jonka mukaan BLD-kuvauksen haarajoukon komplementti on aina kvasikonveksi alue.

Rajakuvauksien olemassaolon osoittamiseksi käytetään Arzelà-Ascolin lausetta. Lauseen muotoilua varten määritellään, että kokoelma $\mathcal{F}$ kuvauksia $B^n \to \mathbb{R}^n$ on *yhtäjatkuva*, mikäli jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ kaikilla $f \in \mathcal{F}$ ja $x, y \in B^n$, joilla pätee $d(x, y) < \delta$.

Lause 5.1 (Arzela-Ascolin lauseen erikoistapaus)**.** *Olkoon $\mathcal{F}$ yhtäjatkuva kokoelma kuvauksia $B^n \to \mathbb{R}^n$, joille pätee*

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_\infty < \infty.$$

Tällöin jokaisella kokoelman $\mathcal{F}$ jonolla (f_n) on osajono, joka suppenee tasaisesti kompakteissa joukoissa kohti joukon $\mathcal{F}$ kuvausta.

Todistus. Todistus tilanteessa, jossa kuvaukset ovat metriseltä avaruudelta kompleksilukujen joukolle löytyy lähteestä [Rud87, Theorem 11.28]. Todistus on identtinen tilanteessa $B^n \to \mathbb{R}^n$. □

Todistuksissa tarvitaan muutamia Lipschitz-analyyttisiä perustuloksia, jotka seuraavaksi esitellään. Seuraavan lauseen todistus löytyy esimerkiksi kirjasta [Hei05, Theorem 3.1.].

Lause 5.2 (Rademacherin lause)**.** *Olkoon $f\colon B^n \to \mathbb{R}^n$ L-Lipschitz kuvaus. Tällöin kuvaus f on differentioituva melkein kaikkialla. Erityisesti kuvauksen f Jacobin determinantti J_f on määritelty melkein jokaisessa pisteessä ja $|J_f(x)| \leq L^n$ melkein kaikilla $x \in B^n$.*

Seuraava tulos on nimeltään Lipschitz-kuvausten pinta-alakaava. Lause todistuksineen löytyy esimerkiksi lähteestä [EG92, Theorem 1, p. 96].

Lause 5.3. *Olkoon $f\colon B^n \to \mathbb{R}^n$ L-Lipschitz kuvaus. Tällöin jokaiselle mitalliselle joukolla $A \subset B^n$ pätee*

$$\int_A |J_f| = \int_{fA} N(y,f,A)\,dm(y).$$

Seuraavan lemman todistus seuraa lauseen [Ric93, 4.14 Proposition (b)] todistusta Lipschitz-analyysin hengessä.

Lemma 5.4. *Olkoon $f\colon B^n \to \mathbb{R}^n$ haarautuva peitekuvaus, joka on Lipschitz. Niissä kuvauksen f haarajoukon pisteissä $x \in \mathrm{B}_f$, joissa kuvaus f on differentioituva, pätee $J_f(x) = 0$.*

Todistus. Oletetaan, että x_0 on piste, jossa kuvaus f on differentioituva ja pätee $J_f(x_0) \neq 0$. Olkoon $r > 0$ sellainen, että

$$B_r := B(x_0, r) \subset B^n$$

ja $N(f(x_0), f, \overline{B}_r) = 1$. Koska $f(x_0) \notin f\partial\overline{B}_r$, niin on voimassa

$$c := d(f(x_0), \partial f B_r) > 0.$$

Tällöin kaikilla $t \in [0,1]$ ja $\mathbf{v} \in B(0, \frac{c}{2L})$ pätee

$$\begin{aligned} d\left(\frac{f(x_0+t\mathbf{v}) - f(x_0)}{t}, 0\right) &= \left\|\frac{f(x_0+t\mathbf{v}) - f(x_0)}{t}\right\| = \frac{\|f(x_0+t\mathbf{v}) - f(x_0)\|}{|t|} \\ &\leq \frac{L\|t\mathbf{v}\|}{|t|} = L\|\mathbf{v}\| < L\frac{c}{2L} < c. \end{aligned}$$

Lisäksi kuvaukset

$$g_j\colon B_r \to \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{v} \mapsto \frac{f(x_0 + j^{-1}\mathbf{v}) - f(x_0)}{j^{-1}}$$

suppenevat tasaisesti kompakteissa joukoissa kohti rajakuvausta $\mathbf{v} \mapsto Df(x_0)\mathbf{v}$, joten lemman 3.30 nojalla jollain $j \in \mathbb{N}$ pätee, että kuvauksilla

$$\mathbf{v} \mapsto Df(x_0)\mathbf{v} \quad \text{ja} \quad \mathbf{v} \mapsto g_j(\mathbf{v})$$

on sama lokaali indeksi origossa. Lisäksi kuvauksen g_j indeksi origossa on sama kuin kuvauksen f indeksi pisteessä x_0.

Oletuksen $J_f(x_0) \neq 0$ nojalla $i(0; Df(x_0)) = \pm 1$, sillä lineaarinen bijektio on aina homeomorfismi. Näin ollen $i(x_0; f) = 1$, sillä kuvaus f on suunnistuksen säilyttävä. Erityisesti $x_0 \notin \mathrm{B}_f$ lemman 4.8 perusteella ja väite on todistettu. □

Lemma 5.5. *Olkoon $f\colon B^n \to \mathbb{R}^n$ haarautuva peitekuvaus, joka on Lipschitz. Tällöin*

$$m(f\,\mathrm{B}_f) = 0.$$

Todistus. Lemman 5.4 nojalla BLD-kuvauksen Jacobin determinantti on nolla niissä haarajoukon pisteissä, joissa se on määritelty. Täten pinta-alakaavan nojalla on voimassa

$$m(f\,\mathrm{B}_f) \leq \int_{f\,\mathrm{B}_f} N(y,f,\mathrm{B}_f)\,dy = \int_{\mathrm{B}_f} |J_f| = 0.$$

Tämä todistaa väitteen. □

Polkujen nostamisen sekä pinta-alakaavan avulla voidaan rajoittaa BLD-kuvauksen geometrista astetta. Seuraava lause todistuksineen on lähteestä [MV88, Theorem 4.12.]

Lause 5.6. *Olkoon $f\colon B^n \to \mathbb{R}^n$ L-BLD -kuvaus. Tällöin kaikilla $r \in (0,1)$ on voimassa*

$$N(f, B^n(0,r)) \leq L^{2n}(1-r)^{-n}.$$

Todistus. Voidaan olettaa, että $f(0) = 0$. Todistetaan, että mielivaltaisella $y \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$N(y, f, B^n(0,r)) \leq L^{2n}(1-r)^{-n}.$$

Kuula $B^n(0,r)$ on prekompakti, joten joukko $f^{-1}\{y\} \cap B^n(0,r)$ on äärellinen, koska kuvaus f on diskreetti. Merkitään

$$\{x_1, \ldots, x_k\} := f^{-1}\{y\} \cap B^n(0,r),$$

missä $k = N(y, f, B^n(0,r))$. Asetetaan $b = L^{-1}(1-r)$ ja määritellään jokaisella $e \in S^{n-1}$ polku

$$\beta_e\colon [0,b) \to \mathbb{R}^n, \quad \beta_e(t) = te.$$

Olkoon $\{\alpha_e^1, \ldots, \alpha_e^m\}$ polun β_e maksimaalinen kokoelma nostoja pisteistä

$$\{x_1, \ldots, x_k\}$$

jokaisella $e \in S^{n-1}$. Nyt jokaisella $e \in S^{n-1}$ ja kaikilla $j = 1, \ldots, m$ pätee

$$\ell(\alpha_e^j) \leq L\ell(f \circ \alpha_e^j) \leq L\ell(\beta_e) = 1 - r.$$

Tästä seuraa, että nostot α_e^j ovat täydellisiä, sillä kullakin on positiivinen etäisyys yksikkökuulan B^n reunaan.

Maksimaalisen kokoelman ominaisuuksista seuraa, että jokaisella

$$z \in B^n(0,b) \setminus f\,\mathrm{B}_f$$

pätee $N(z, f, B^n) \geq m \geq k$. Soveltamalla pinta-alakaavaa sekä tietoa $m(f\,\mathrm{B}_f) = 0$ saadaan

$$\begin{aligned}
\int_{B^n} |J_f(x)|\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} N(z, f, B^n)\,dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n \setminus f\,\mathrm{B}_f} N(z, f, B^n)\,dz \\
&\geq km(B^n(0,b)) \\
&= km(B^n)b^n.
\end{aligned}$$

Koska $|J_f(x)| \leq L^n$ melkein kaikilla $x \in B^n$, niin pätee

$$k \leq L^n b^{-n} = L^{2n}(1-r)^{-n}.$$

Tämä todistaa väitteen. □

5.1 LQ- ja BLD-kuvausten konvergenssista

Tässä luvussa todistetaan yksi tämän työn päätuloksista: *jos* (f_j) *on jono* L*-BLD -kuvauksia* $B^n \to \mathbb{R}^n$*, joille pätee* $f_j(0) = 0$ *kaikilla* $j \in \mathbb{N}$*, niin jonolla* (f_j) *on osajono, joka suppenee tasaisesti kompakteissa joukoissa kohti* L*-BLD -kuvausta* $f\colon B^n \to \mathbb{R}^n$. Lokaalisti tasaisesti suppeneva osajono löydetään soveltamalla Arzela-Ascolin lausetta. Tämän jälkeen osoitetaan, että rajakuvaus on suunnistuksen säilyttävä diskreetti L-LQ -kuvaus ja todistetaan, että diskreetti LQ-kuvaus on BLD-kuvaus. Viimeksi mainittua tulosta kirjoittaja ei ole nähnyt mainittavan kirjallisuudessa.

Tässä kappaleessa LQ-kuvaus $f\colon B^n \to \mathbb{R}^n$ on LQ-kuvaus joukon $B^n \subset \mathbb{R}^n$ suhteen.

Huomautus 5.7. L-LQ -kuvaus on aina avoin L-Lipschitz -kuvaus. On avoin kysymys onko LQ-kuvaus $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diskreetti kuvaus, kun $n \geq 3$. (Katso esimerkiksi [BJL+99].) Tästä seuraisi tässä kappaleessa todistettavien lauseiden 5.8 sekä 5.14 nojalla, että BLD-kuvausten ja LQ-kuvausten luokat ovat samat.

Lause 5.8. *Olkoon* $\mathcal{M}$ *täydellinen polkumetrinen monisto,* $A \subset \mathcal{M}$ *ja* $f\colon A \to \mathcal{N}$ L*-BLD -kuvaus. Tällöin* f *on joukon* A *suhteen* L*-LQ-kuvaus.*

Todistus. Olkoon $B^n(x,r)$ kuula, joka sisältyy joukkoon A. Väite

$$fB^n(x,r) \subset B^n(f(x), Lr)$$

seuraa siitä, että L-BLD -kuvaus on aina L-Lipschitz kuvaus.

Inkluusio

$$B^n(f(x), L^{-1}r) \subset fB^n(x,r)$$

riittää todistaa sellaisille pisteille $x \in A$ ja säteille $r > 0$, joille pätee, että $\overline{B}^n(x,r) \subset A$. Tämä seuraa siitä, että tällöin kaikilla $r_0 > 0$, joilla on voimassa $B^n(x,r_0) \subset A$, pätee

$$B^n(f(x), L^{-1}r_0) = \bigcup_{0<r<r_0} B^n(f(x), L^{-1}r) \subset \bigcup_{0<r<r_0} fB^n(x,r) \subset fB^n(x,r_0).$$

Tehdään vastaoletus, että on olemassa sellainen piste $x_0 \in A$ sekä säde $r_0 > 0$, että $\overline{B}^n(x_0,r_0) \subset A$, mutta

$$B^n(f(x_0), L^{-1}r_0) \not\subset fB^n(x_0,r_0).$$

Tällöin on olemassa piste $z \in \partial fB^n(x_0,r_0)$, jolle pätee, että $d(z, f(x_0)) < L^{-1}r_0$. Olkoon $0 < \varepsilon < L^{-1}r_0 - d(z, f(x_0))$, valitaan geodeesi $\alpha\colon f(x_0) \curvearrowright_g z$, asetetaan

$$t_0 = \sup\{t \mid [0, \alpha(t)] \subset fB^n(x_0,r_0)\}$$

ja merkitään $z_0 := \alpha(t_0)$.

Valitaan rajoittumalle $\alpha|_{[0,t_0)}$ täydellinen nosto β pisteestä x_0 ja jatketaan se poluksi $\gamma\colon [0,t_0] \to \mathcal{M}$. Nyt $\gamma(t_0) \in \partial B(x_0,r_0)$, sillä kuvaus f on avoin. Kyseinen polku γ yhdistää siis pisteen x_0 kuulan $B(x_0,r_0)$ reunaan, mutta polun γ pituus on

$$\begin{aligned}\ell(\gamma) = \ell(\beta) &\leq L\ell(f \circ \beta) = L\ell(\alpha) = Ld(z_0, f(x_0)) \\ &\leq Ld(z, f(x_0)) < LL^{-1}r_0 = r_0,\end{aligned}$$

eli $\ell(\gamma) < r_0$. Tämä on ristiriita, sillä kuulan $B(x_0, r_0)$ keskipisteen etäisyys reunasta on r_0. Väite on täten todistettu. $\square$

Lauseesta 5.8 saadaan pääteltyä myös seuraava fakta.

Korollaari 5.9. *Olkoot $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ polkumetrisiä monistoja sekä $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ BLD-kuvaus. Jos monisto $\mathcal{M}$ on täydellinen, niin kuvaus f on surjektio.*

Lause 5.10. *Olkoon (f_j) jono L-LQ -kuvauksia $B^n \to \mathbb{R}^n$. Mikäli jono (f_j) suppenee tasaisesti kompakteissa joukoissa kohti jatkuvaa kuvausta $f\colon B^n \to \mathbb{R}^n$, niin rajakuvaus f on L-LQ.*

Todistus. Rajakuvaus f on L-Lipschitz, sillä se on L-Lipschitz -kuvausten lokaalisti tasainen raja. Erityisesti on voimassa $fB(x, r) \subset B(f(x), Lr)$ kaikilla $x \in B^n$ ja $r > 0$.

Olkoot $x_0 \in B^n$ ja $r \in (0, 1 - \|x_0\|)$. Todistetaan, että kaikilla $0 < r' < r$ pätee

$$fB(x_0, r) \supset B(f(x_0), L^{-1}r').$$

Olkoon $y \in B(f(x_0), L^{-1}r')$. Tasaisen suppenemisen perusteella on olemassa sellainen $k_0 \in \mathbb{N}$, että kaikilla $k \geq k_0$ on voimassa

$$y \in B(f_k(x_0), L^{-1}r') \subset f_k B(x_0, r').$$

Täten jokaisella $k \geq k_0$ voidaan kiinnittää piste

$$x_k \in B(x_0, r') \cap f_k^{-1}\{y\}.$$

Jonolle (x_k) löytyy kompaktisuuden perusteella osajono joka suppenee kohti pistettä

$$z \in \overline{B}(x_0, r') \subset B(x_0, r).$$

Rajakuvauksen jatkuvuuden perusteella on voimassa $f(z) = y$, joten

$$fB(x_0, r) \supset B(f(x_0), L^{-1}r').$$

Väite on täten todistettu. $\square$

Seuraava lemma on lähteestä [Ric93, Lemma 8.8.].

Lemma 5.11. *Olkoon (f_j) jono L-Lipschitz-kuvauksia $B^n \to \mathbb{R}^n$, joka suppenee tasaisesti kompakteissa joukoissa kohti jatkuvaa kuvausta. Tällöin suppenevan jonon Jacobin determinantit suppenevat heikosti kohti rajakuvauksen Jacobin determinanttia.*

Propositio 5.12. *Olkoon $f\colon B^n \to \mathbb{R}^n$ L-LQ -kuvaus. Tällöin*

$$m(\mathrm{B}_f) = 0.$$

Todistus. Tehdään vastaoletus, $m(\mathrm{B}_f) > 0$. Valitaan haarajoukon tiheyspiste x_0, ja olkoot $r_j \in \mathbb{R}_+, j \in \mathbb{N}$ sellaisia lukuja, joille pätee

$$\frac{m(B_f \cap B(x_0, r_j))}{m(B(x_0, r_j))} > (1 - j^{-1}).$$

Tällöin kuvaukset

$$f_j \colon B^n \to \mathbb{R}^n, \quad f_j(x) = \frac{f(x_0 + r_j x) - f(x_0)}{r_j},$$

ovat sellaisia L-LQ -kuvauksia, että on voimassa $m(\mathrm{B}_{f_j}) > 1 - j^{-1}$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Lauseiden 5.1 ja 5.8 sekä lemman 5.10 nojalla jonolla (f_j) on osajono, joka suppenee tasaisesti kompakteissa joukoissa kohti L-LQ -kuvausta $g \colon B^n \to \mathbb{R}^n$.

Koska niissä haarajoukon B_{f_j} pisteissä x, joissa BLD-kuvauksen Jacobin determinantti on määritelty, pätee $J_{f_j}(x) = 0$, niin erityisesti kaikilla $j \in \mathbb{N}$ on voimassa

$$m(J_{f_j}^{-1}\{0\}) \geq m(\mathrm{B}_{f_j}) > 1 - j^{-1}.$$

Täten lemman 5.11 nojalla $J_g(x) = 0$ melkein kaikilla $x \in B^n$. Toisaalta pinta-alakaavan nojalla

$$0 < m(B^n(0, L^{-1})) \leq m(gB^n) \leq \int_{gB^n} N(y, g, B^n)\, dy = \int_{B^n} |J_g| = 0.$$

Tämä on ristiriita ja väite on todistettu. □

Jatkossa merkitään

$$\ell(Df(x)) := \min_{|v|=1} |Df(x)v|,$$

kun $f \colon B^n \to \mathbb{R}^n$ on Lipschitz-kuvaus.

Seuraava lemma on lähteestä [MV88, Lemma 2.15.]

Lemma 5.13. *Olkoon $f \colon B^n \to \mathbb{R}^n$ L-Lipschitz-kuvaus, jolle pätee*

$$L^{-1} \leq \ell(Df(x)) \leq |Df(x)| \leq L \quad \text{ja} \quad J_f(x) \geq 0$$

melkein kaikilla $x \in B^n$. Tällöin kaikilla poluilla $\alpha \colon [0,1] \to B^n$ on voimassa

$$L^{-1}\ell(\alpha) \leq \ell(f \circ \alpha) \leq L\ell(\alpha).$$

Seuraava lause on muokattu versio lauseesta [MV88, Theorem 2.16.].

Lause 5.14. *Olkoon $f \colon B^n \to \mathbb{R}^n$ L-LQ -kuvaus. Jos f on diskreetti, niin f on L-BLD.*

Todistus. Haarajoukon määritelmästä seuraa, että $B^n \setminus B_f$ on avoin joukko. Lisäksi diskreetti LQ-kuvaus on haarautuva peitekuvaus, joten kappaleen 4.1 nojalla haarajoukko on sisäpisteetön eikä separoi lähtömonistoa B^n lokaalisti.

Proposition 5.12 nojalla kuvaus f on melkein kaikkialla lokaalisti L-bilipschitz, sillä homeomorfinen L-LQ-kuvaus on L-bilipschitz-kuvaus. Täten melkein kaikkialla pätee, että

$$L^{-1} \leq \ell(Df(x)) \leq |Df(x)| \leq L.$$

Soveltamalla lemman 5.4 todistusta nähdään, että kaikissa pisteissä $x \in B^n$ joissa kuvauksen f Jacobin determinantti on määritelty, pätee $i(x; f) = \operatorname{sign} J_f(x)$. Koska haarajoukko ei separoi lähtömonistoa B^n lokaalisti, ei topologinen indeksi

$i(\cdot; f)$ vaihda merkkiä haarajoukon komplementissa. Täten myöskään kuvauksen f Jacobin determinantti ei vaihda merkkiään positiivimittaisessa joukossa. Erityisesti pätee $J_f(x) \geq 0$ ($J_f(x) \leq 0$) melkein kaikilla $x \in B^n$ mikäli kuvaus f on suunnistuksen säilyttävä (kääntävä). Täten lemman 5.13 nojalla kuvaus f toteuttaa BLD-kuvausten määritelmässä esiintyvän epäyhtälön (5) (sivulla 11). Nyt kuvaus f on L-BLD -kuvaus, sillä se on oletuksen mukaan diskreetti, LQ-kuvauksena avoin kuvaus ja lemman 5.13 nojalla toteuttaa polkujen pituuksiin liittyvän epäyhtälön. □

Lauseen 5.14 soveltamista varten osoitetaan, että BLD-kuvausten jonon lokaalisti tasainen raja on diskreetti kuvaus.

Lause 5.15. *Olkoon (f_j) jono L-BLD -kuvauksia $B^n \to \mathbb{R}^n$, joille pätee $f_j(0) = 0$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ja jotka suppenevat tasaisesti kompakteissa joukoissa kohti jatkuvaa kuvausta $f\colon B^n \to \mathbb{R}^n$. Tällöin rajakuvaus f on diskreetti.*

Todistus. Tehdään vastaoletus, että kuvaus f ei ole diskreetti. Tällöin on olemassa sellainen piste $y \in \mathbb{R}^n$, että joukolla $f^{-1}\{y\}$ on kasautumispiste $x_0 \in B^n$. Voidaan olettaa, että $x_0 = 0$ ja $f(0) = 0$.

Koska kuulassa $B^n(0, \frac{1}{2})$ on äärettömän monta pisteen 0 alkukuvaa, niin jokaisella $k \in \mathbb{N}$ on olemassa säde $r_k > 0$ sekä sellaiset pisteet $x_1, \ldots, x_k \in f^{-1}\{y\}$, että kuulat $B^n(x_j, r_k)$ ovat erillisiä ja $B^n(x_j, r_k) \subset B^n(0, \frac{1}{2})$, kun $j = 1, \ldots, k$. Valitaan $\varepsilon = \frac{r_k}{4L}$ ja sellainen indeksi j_0, että $\|f - f_{j_0}\|_\infty < \varepsilon$. Tällöin kaikilla $j \in 1, \ldots, k$ pätee $f_{j_0}(x_j) \in B^n(0, \varepsilon)$. Koska kuvaus f_{j_0} on L-LQ, niin erillisten kuulien $B^n(x_j, r_k)$ kuvajoukkojen leikkaus

$$\bigcap_{j=1}^{k} f_{j_0} B^n(x_j, r_k)$$

on epätyhjä. Erityisesti kuvaukselle f_{j_0} pätee siis

$$N(f_{j_0}, B^n(0, \frac{1}{2})) \geq N(0, f_{j_0}, B^n(0, \frac{1}{2})) \geq k.$$

Toisaalta lauseen 5.6 nojalla

$$N(f_{j_0}, B^n(0, \frac{1}{2})) \leq L^{2n} 2^{-n},$$

josta seuraa ristiriita valitsemalla $k > L^{2n} 2^{-n}$. Väite on täten todistettu. □

Lause 5.16. *Olkoon (f_j) jono L-BLD -kuvauksia $B^n \to \mathbb{R}^n$, joille pätee $f_j(0) = 0$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Tällöin on olemassa jonon (f_j) osajono (g_j) joka suppenee tasaisesti kompakteissa joukoissa kohti L-BLD -kuvausta $f\colon B^n \to \mathbb{R}^n$.*

Todistus. Koska kuvaukset f_j ovat L-Lipschitz -kuvauksia, niin perhe $\{f_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ on yhtäjatkuva. Täten Arzela-Ascolin lauseen perusteella on olemassa jonon (f_j) osajono (g_j) joka suppenee tasaisesti kompakteissa joukoissa kohti jatkuvaa kuvausta $f\colon B^n \to \mathbb{R}^n$.

Koska lauseen 5.8 perusteella L-BLD -kuvaukset ovat aina L-LQ -kuvauksia, niin lauseen 5.10 nojalla kuvaus f on L-LQ. Lisäksi lauseen 5.15 nojalla f on diskreetti. Nyt lauseen 5.14 nojalla kuvaus f on L-BLD -kuvaus ja väite on todistettu. □

5.2 Haarajoukon komplementin geometria

Tässä kappaleessa todistetaan, että BLD-kuvauksen haarajoukon komplementti on kvasikonveksi alue, kun lähtö- ja maalimonisto ovat geometrisia monistoja. Väite ja sen todistus on mukailtu versio artikkelin [MV88] tuloksista, joka puolestaan nojaa osittain lähteeseen [Väi88].

Määritelmä 5.17. Olkoon $c \geq 1$. Metrisen avaruuden X osajoukko A on c-*pullea*, jos kaikilla $x \in A$ ja $r \in (0, \operatorname{diam}(A))$ on olemassa sellainen piste $z \in \overline{B}(x,r)$, että on voimassa $B(z, \frac{r}{c}) \subset A$.

Lause 5.18. *Olkoot $n \geq 2$ ja $L \geq 1$. Tällöin on olemassa sellainen vakio $c := c(n, L)$, että jokaisella L-BLD -kuvauksella $f \colon B^n \to \mathbb{R}^n$ joukko $B^n \setminus \mathrm{B}_f$ on c-pullea.*

Todistus. Tehdään vastaoletus, että jokaisella $j \geq 0$ on olemassa sellainen L-BLD -kuvaus $f_j \colon B^n \to \mathbb{R}^n$, että joukko $B^n \setminus \mathrm{B}_{f_j}$ ei ole j-pullea. Tällöin joukko B_{f_j} on $\frac{2}{j}$-täysi joukossa B^n, eli pätee

$$\overline{B}^n(\mathrm{B}_{f_j}, \frac{2}{j}) \cap B^n = B^n.$$

Täten jokaisella j löytyy sellainen piste $a_j \in B^n \setminus \mathrm{B}_{f_j}$ ja säde $r_j \in (0, 2)$, että kaikille $z \in \overline{B}^n(a_j, r_j)$ pätee $d(z, \mathrm{B}_{f_j}) \leq \frac{2r_j}{j}$. Merkitään $a'_j = (1 - \frac{r_j}{2})a_j$, jolloin pätee

$$B^n(a'_j, \frac{r_j}{2}) \subset B^n(0, r_{f_j}) \cap B^n(a_j, r_j).$$

Nyt kuvausten

$$g_j \colon B^n \to \mathbb{R}^n, \quad g_j(x) = \frac{r_j}{2} \left(f_j(a'_j + \frac{2}{r_j} x) - f(a'_j) \right)$$

haarajoukoille pätee $d(z, \mathrm{B}_{g_j}) \leq 4j^{-1}$ kaikilla j ja kaikilla $z \in B^n$. Lauseen 5.16 perusteella jonolla g_j on osajono h_j joka suppenee kohti L-BLD -kuvausta $h \colon B^n \to \mathbb{R}^n$. Korollaarin 4.9 mukaan kuvausten h_j haarajoukot suppenevat pisteittäin kohti kuvauksen h haarajoukkoa. Lisäksi jokaisella $z \in B^n$ pätee $d(z, \mathrm{B}_h) \leq 4j^{-1}$ kaikilla j. Näin ollen B_h on koko B^n, sillä haarajoukko B_h on suljettu kuulassa B^n. Tämä on ristiriita, sillä haarajoukolla ei voi olla sisäpisteitä. □

Määritelmä 5.19. Olkoon $c \geq 1$. Metrisen avaruuden kuulat $B(x_1, r_1)$ ja $B(x_2, r_2)$ muodostavat c-*parin*, mikäli pätee

(a) $\frac{1}{2} r_1 \leq r_2 \leq 2r_1$ ja

(b) $d(x_1, x_2) \leq 4c \max(r_1, r_2)$.

Seuraava tulos on artikkelista [Väi88, Lemma 2.14].

Lause 5.20. *Olkoon $A \subset X$ metrisen avaruuden c-pullea osajoukko ja olkoot a ja b joukon A kaksi pistettä, joiden etäisyyttä merkitään $d(a, b) = r > 0$. Tällöin on olemassa sellaiset joukon A jonot (a_j) ja (b_j), joille pätee* *(a)* $d(a_j, a) \le 2^{-j} r$ *ja* $d(b_j, b) \le 2^{-j} r$ *kaikilla* $j \ge 0$*,*

(b) Pari (B_1, B_1') *sekä parit* (B_j, B_{j+1}) *ja* (B_j', B_{j+1}') *kaikilla* $j \in \mathbb{N}$ *ovat c-pareja, missä*

$$B_j := B(a_j, 2^{-j}\frac{r}{c}) \quad ja \quad B_j' := B(b_j, 2^{-j}\frac{r}{c}),$$

(c) $B_j, B_j' \subset A$ *kaikilla* $j \in \mathbb{N}$*.*

Todistus. Muodostetaan jono (a_j), jonon (b_j) konstruktio on identtinen. Olkoon $j \in \mathbb{N}$. Koska joukko A on c-pullea, niin kuulasta $\overline{B}(a, 2^{-j} r)$ löytyy piste a_j, jolle pätee $B(a_j, 2^{-j}\frac{r}{c}) \subset A$. Selvästi on voimassa $d(a_j, a) \le 2^{-j} r$ ja $d(b_j, b) \le 2^{-j} r$ kaikilla j.

Näytetään seuraavaksi, että (B_1, B_1') ja (B_j, B_{j+1}) ovat c-pareja. Koska jonojen (a_j) ja (b_j) jäsenet ovat symmetrisessä asemassa, niin samalla todistuksella myös (B_j', B_{j+1}') muodostaa c-parin jokaisella $j \in \mathbb{N}$.

Huomataan, että on voimassa

$$d(a_1, b_1) \le d(a_1, a) + d(a, b) + d(b, b_1) \le \frac{r}{2} + r + \frac{r}{2} = 4\frac{r}{2} \le 4c \max(\frac{r}{2c}, \frac{r}{2c}).$$

Koska kuulien B_1 ja B_1' säteiden suhde on tasan 1, pari (B_1, B_1') on c-pari. Jonon (a_j) pisteille pätee, että

$$\begin{aligned} d(a_j, a_{j+1}) &\le d(a_j, a) + d(a, a_{j+1}) \\ &\le 2^{-j} r + 2^{-j-1} r \\ &= (2^{-j} r)(1 + \frac{1}{2}) \\ &\le 4c \max(\frac{r}{2^j c}, \frac{r}{2^{j+1} c}) \end{aligned}$$

ja kuulien säteiden suhde sisältyy väliin $[\frac{1}{2}, 2]$. Täten myös pari (B_j, B_{j+1}) on c-pari jokaisella $j \in \mathbb{N}$. Lisäksi kuulajonojen määritelmän perusteella pätee $B_j \cup B_j' \subset A$. □

Huomautus 5.21. Edellisen lauseen antamaa ominaisuutta käytetään artikkelissa [HK95] niin sanotun ketjuehdon määrittelemiseen.

Seuraava lemma todistuksineen on muokattu versio artikkelista [Väi88, Theorem 2.15.].

Lemma 5.22. *Olkoon* $\mathcal{M}$ *metrinen avaruus ja* $D \subset \mathcal{M}$ *c-pullea osajoukko. Jos jokaisen c-parin*

$$(B(x_1, r_1), B(x_2, r_2))$$

keskipisteet x_1 *ja* x_2 *voidaan yhdistää K-kvasigeodeesilla, niin* D *on* $2K$*-kvasikonveksi.*

Todistus. Olkoot $a, b \in D$ ja $r := d(a, b) > 0$. Olkoot (a_j) ja (b_j) lauseen 5.20 antamat jonot. Oletuksen perusteella kaikilla $j \ge 1$ voidaan valita K-kvasigeodeesit

$$\alpha_j \colon [2^{-j} - 1, 2^{-j+1} - 1] \to D, \quad \beta_j \colon [2 - 2^{-j+1}, 2 - 2^{-j}] \to D$$

sekä $\gamma\colon [0,1] \to D$, missä

$$\alpha_j : a_j \curvearrowright a_{j+1}, \quad \beta_j : b_j \curvearrowright b_{j+1} \quad \text{ja} \quad \gamma : a_1 \curvearrowright b_1.$$

Määritellään

$$\sigma_j : [2^{-j} - 1, 2 - 2^{-j}] \to D$$

asettamalla

$$\sigma_j(t) = \begin{cases} \overleftarrow{\alpha}_j(t), & \text{kun } t \in [2^{-j} - 1, 2^{-j+1} - 1] \\ \gamma(t), & \text{kun } t \in [0,1] \\ \beta_j(t), & \text{kun } t \in [2 - 2^{-j+1}, 2 - 2^{-j}]. \end{cases}$$

Muodostetaan $\sigma\colon [-1,2] \to D$ asettamalla

$$\sigma(t) = \lim_{j\to\infty} \sigma_j(t).$$

Nyt saadaan epäyhtälöketju

$$\begin{aligned} \ell(\sigma) &= \sum_{j\geq 1} \ell(\alpha_j) + \ell(\gamma) + \sum_{j\geq 1} \ell(\beta_j) \\ &\leq \sum_{j\geq 1} Kd(a_j, a_{j+1}) + Kd(a_1, b_1) + \sum_{j\geq 1} Kd(b_j, b_{j+1}) \\ &\leq K \left(\sum_{j\geq 1} 2^{-j} r + r + \sum_{j\geq 1} 2^{-j} r \right) \\ &= 2Kr = 2Kd(a,b), \end{aligned}$$

Joten alue D on $2K$-kvasikonveksi. □

Lause 5.23. *On olemassa sellainen vakio $K := K(n,L)$, että kaikilla L-BLD -kuvauksilla $f\colon B^n \to \mathbb{R}^n$ joukko $B^n \setminus \mathrm{B}_f$ on K-kvasikonveksi.*

Todistus. Palautetaan aluksi mieleen, että koska joukko B_f on sisäpisteetön ja suljettu eikä separoi lokaalisti lähtömonistoa lauseen 4.5 nojalla, on joukko $B^n \setminus \mathrm{B}_f$ suoristuvasti yhtenäinen.

Tehdään vastaoletus, että jokaisella $j \geq 1$ on olemassa L-BLD-kuvaus

$$f_j : B^n \to \mathbb{R}^n$$

sekä pisteet $a_j, b_j \in B^n \setminus \mathrm{B}_{f_j}$, joita ei voi yhdistää haarajoukon ulkopuolella polulla, jonka pituus olisi alle $2jd(a_j, b_j)$.

Tällöin jokaisella $j \geq 1$ voidaan valita sellainen jono $(x_1^j, \ldots, x_i^j)$ haarajoukon komplementin pisteitä, että peräkkäisten pisteiden välinen etäisyys on enintään puolet kummankaan pisteen etäisyydestä reunaan ja

$$\sum_{k=1}^{i-1} d(x_k^j, x_{k+1}^j) < 2d(a_j, b_j).$$

Tutkimalla tällaisten jonojen peräkkäisiä pisteitä voidaan olettaa, että on voimassa inkluusio

$$B^n(a_j, 2d(a_j, b_j)) \subset B^n$$

kaikilla $j \geq 1$. Lisäksi lemman 5.22 perusteella riittää tutkia haarajoukon B_{f_j} komplementtiin sisältyvien c-parien keskipisteitä, sillä lauseen 5.18 perusteella haarajoukon komplementti on aina $c := c(L, n)$-pullea. Täten voidaan olettaa, että pätee

$$B_j \cap \mathrm{B}_{f_j} = \emptyset, \quad \text{missä} \quad B_j := B^n(a_j, \frac{2}{c} d(a_j, b_j)).$$

Olkoon nyt $T_j \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ suunnistuksen säilyttävä affiini isometria, joka vie pisteen a_j origoon ja pisteen b_j pisteelle $\frac{e_1}{2}$ sekä $S_j \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ affiini kuvaus

$$S_j(x) = 2d(a_j, b_j)(x - f(a_j))$$

Määritellään kuvaukset

$$h_j \colon B^n \to \mathbb{R}^n, \quad h_j = S_j \circ f|_{B_j} \circ (T_j|_{B_j})^{-1}.$$

Kuvaukset h_j ovat edelleen L-BLD-kuvauksia, kuvaavat origon origolle, ja pisteitä 0 ja $\frac{e_1}{2}$ ei voi yhdistää haarajoukon ulkopuolella polulla, jonka pituus olisi alle j.

Nyt lauseen 5.16 perusteella jonolla (h_j) on osajono (g_j) joka suppenee tasaisesti kompakteissa joukoissa kohti L-BLD -kuvausta $g \colon B^n \to \mathbb{R}^n$. Koska kumpikaan pisteistä 0 tai $\frac{e_1}{2}$ ei kuulu joukkoon $B^n(\mathrm{B}_{g_j}, \frac{1}{2c})$ millään $j \geq 1$, niin ne eivät kuulu myöskään kuvauksen g haarajoukkoon lauseen 3.30 perusteella. Joukko $B^n \setminus \mathrm{B}_g$ on suoristuvasti yhtenäinen, joten on olemassa suoristuva polku $\alpha \colon [0, 1] \to B^n \setminus \mathrm{B}_g$, $\alpha \colon 0 \curvearrowright \frac{e_1}{2}$.

Seuraavaksi näytetään, että on olemassa sellainen indeksi j_0, että kaikilla $j \geq j_0$ pätee $|\alpha| \cap \mathrm{B}_{g_j} = \emptyset$. Jos mielivaltaisen suurilla j pätisi $|\alpha| \cap \mathrm{B}_{g_j} \neq \emptyset$, niin korollaarin 4.9 nojalla $x_0 \in |\alpha| \cap \mathrm{B}_g$, mikä on mahdotonta. Löytyy siis haluttu j_0.

Näin ollen suoristuva polku α yhdistää pisteet 0 ja $\frac{e_1}{2}$ haarajoukon B_{g_j} ulkopuolella kaikilla $j \geq j_0$. Tämä on ristiriita ja väite on todistettu. $\square$

Lause 5.24. *Olkoot $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ n-ulotteisia geometrisia monistoja ja $L \geq 1$. Tällöin on olemassa sellainen vakio $K \geq 1$, että jokaisen L-BLD-kuvauksen $f \colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ haarajoukon komplementti on K-kvasikonveksi.*

Todistus. Olkoot $a, b \in \mathcal{M} \setminus \mathrm{B}_f$ ja $\gamma \colon a \underset{g}{\curvearrowright} b$. Olkoot C' ja R' sellaiset vakiot, että monistolla $\mathcal{N}$ on (C', R')-rajoitettu geometria. Valitaan sellainen luku C, että moniston $\mathcal{M}$ geometria on (C, R)-rajoitettu jollain $R < \frac{R'}{L}$. Tällöin moniston $\mathcal{M}$ jokainen (C, R)-kartta kuvautuu moniston $\mathcal{N}$ jonkin (C', R')-kartan sisään kuvauksessa f.

Valitaan nyt välin $[0, 1]$ sellainen jako

$$0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = 1,$$

että epäyhtälö $d(\gamma(a_j), \gamma(a_{j+1})) < \frac{R}{2}$ on voimassa kaikilla $j = 0, \ldots, k-1$. Tällöin erityisesti kuula

$$B_{\mathcal{M}}(\gamma(a_j), 2d(\gamma(a_j), \gamma(a_{j+1})))$$

sisältyy aina johonkin (C, R)-karttaan kaikilla $j = 0, \ldots, k-1$. Olkoon $\delta > 0$ ja $\varepsilon \in (0, (2k)^{-1}(1+\delta))$. Valitaan jokaisella $j = 0, \ldots, k$ pisteet

$$x_j \in B_{\mathcal{M}}(\gamma(a_j), \varepsilon) \setminus \mathrm{B}_f \, .$$

Voidaan olettaa, että ε on niin pieni, että jokaisella $j = 0, \ldots, k-2$ pisteet x_j ja x_{j+1} sisältyvät samaan (C, R)-karttaan.

Konjugoimalla sekä skaalaamalla kuvaus f lokaalisti (C, R)- ja (C', R')-karttoihin liittyvillä C- ja C'-bilipschitz-karttakuvauksilla ϕ_C ja $\phi_{C'}$ saadaan $(CC'L)$-BLD-kuvaus

$$\widetilde{f} \colon B^n \to B^n(0, C'LR), \quad \widetilde{f}(x) = \phi_{C'} \circ f \circ \phi_C^{-1}(\frac{C}{R}x).$$

Lauseen 5.23 perusteella $B^n \setminus \mathrm{B}_{\widetilde{f}}$ on melkein $K(C'CL, n)$-kvasikonveksi. Olkoon $j \in \{0, \ldots, k-1\}$. Tällöin voidaan pisteet $\phi_C(x_j)$ ja $\phi_C(x_{j+1})$ yhdistää polulla $\gamma_j \colon [0,1] \to B^n \setminus \mathrm{B}_{\widetilde{f}}$, jonka pituus on enintään

$$(K(CC'L, n) + \delta) d(\phi_C(x_j), \phi_C(x_{j+1})).$$

Polku γ_j kulkee erityisesti joukon $\mathrm{B}_{\widetilde{f}}$ komplementissa, joten se voidaan siirtää kuvauksen ϕ_C^{-1} avulla poluksi $\beta_j \colon x_j \curvearrowright x_{j+1}$, jolle pätee $|\beta_j| \cap \mathrm{B}_f = \emptyset$ ja saadaan

$$\begin{aligned}
\ell(\beta_j) &\le C\ell(\gamma_j) \\
&\le C(K(CC'L, n) + \delta) d(\phi_C(x_j), \phi_C(x_{j+1})) \\
&\le C^2(K(CC'L, n) + \delta) d(x_j, x_{x_{j+1}}).
\end{aligned}$$

Luvun ε valinnan nojalla on voimassa

$$\sum_{j=0}^{k-1} d(x_j, x_{j+1}) \le 2(1+\varepsilon) k d(a, b) \le (1+\delta) d(a, b),$$

joten polkujen β_j ketjulle $\beta = \beta_1 * \cdots * \beta_k$ pätee

$$\begin{aligned}
\ell(\beta) = \sum_{j=0}^{k-1} \ell(\beta_j) &= (C^2(K(CC'L, n) + \delta)) \sum_{j=0}^{k-1} d(x_j, x_{j+1}) \\
&\le C^2(K(CC'L, n) + \delta)(1+\delta) d(a, b).
\end{aligned}$$

Täten haarajoukon komplementti on melkein $C^2 K(CC'L, n)$-kvasikonveksi. □

Huomautus 5.25. Mikäli monistot ovat myös infinitesimaalisesti bilipschitz-euklidisia, niin lauseessa 5.24 luvut C ja C' voidaan valita mielivaltaisen lähelle lukua 1, jolloin saadaan tulos, jonka mukaan haarajoukon komplementti on melkein $K^*(L, n)$-kvasikonveksiksi, missä

$$K^*(L, n) := \inf_{L' > L} K(L', n),$$

ja $K(L, n)$ on L-BLD -kuvausten $f \colon B^n \to \mathbb{R}^n$ haarajoukkojen komplementtien optimaalinen kvasikonveksisuusvakio.

Konjekturoimme, että $K^*(L, n) = K(L, n)$ kaikilla $L \ge 2$ ja $n \ge 2$. Konjekturoimme lisäksi, että itse asiassa pätee $K(L, n) = 1$ kaikilla $L \ge 2$ ja $n \ge 2$.

Viitteet

[BJL+99] S. Bates, W. B. Johnson, J. Lindenstrauss, D. Preiss, and G. Schechtman. Affine approximation of Lipschitz functions and nonlinear quotients. *Geom. Funct. Anal.*, 9(6):1092–1127, 1999.

[Bor60] Armand Borel. *Seminar on transformation groups*. With contributions by G. Bredon, E. E. Floyd, D. Montgomery, R. Palais. Annals of Mathematics Studies, No. 46. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1960.

[CDPT07] Luca Capogna, Donatella Danielli, Scott D. Pauls, and Jeremy T. Tyson. *An introduction to the Heisenberg group and the sub-Riemannian isoperimetric problem*, volume 259 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.

[Čer64] A. V. Černavskiĭ. Finite-to-one open mappings of manifolds. *Mat. Sb. (N.S.)*, 65 (107):357–369, 1964.

[CH60] Philip T. Church and Erik Hemmingsen. Light open maps on n-manifolds. *Duke Math. J*, 27:527–536, 1960.

[EG92] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

[Eng78] Ryszard Engelking. *Dimension theory*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978. Translated from the Polish and revised by the author, North-Holland Mathematical Library, 19.

[Gro99] Misha Gromov. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, volume 152 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1999. Based on the 1981 French original [MR0682063 (85e:53051)], With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes, Translated from the French by Sean Michael Bates.

[Hei05] Juha Heinonen. *Lectures on Lipschitz analysis*, volume 100 of *Report. University of Jyväskylä Department of Mathematics and Statistics*. University of Jyväskylä, Jyväskylä, 2005.

[HK95] Piotr Hajłasz and Pekka Koskela. Sobolev meets Poincaré. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 320(10):1211–1215, 1995.

[HR02] Juha Heinonen and Seppo Rickman. Geometric branched covers between generalized manifolds. *Duke Math. J.*, 113(3):465–529, 2002.

[HW41] Witold Hurewicz and Henry Wallman. *Dimension Theory*. Princeton Mathematical Series, v. 4. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1941.

[LF73] Jacqueline Lelong-Ferrand. Invariants conformes globaux sur les variétés riemanniennes. *J. Differential Geometry*, 8:487–510, 1973.

[Mas78] William S. Massey. *Homology and cohomology theory*. Marcel Dekker Inc., New York, 1978. An approach based on Alexander-Spanier cochains, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 46.

[Mas91] William S. Massey. *A basic course in algebraic topology*, volume 127 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991.

[MV88] Olli Martio and Jussi Väisälä. Elliptic equations and maps of bounded length distortion. *Math. Ann.*, 282(3):423–443, 1988.

[Ric93] Seppo Rickman. *Quasiregular mappings*, volume 26 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[Rud87] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.

[Väi66] Jussi Väisälä. Discrete open mappings on manifolds. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I No.*, 392:10, 1966.

[Väi88] Jussi Väisälä. Uniform domains. *Tohoku Math. J. (2)*, 40(1):101–118, 1988.

[War83] Frank W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, volume 94 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1983. Corrected reprint of the 1971 edition.