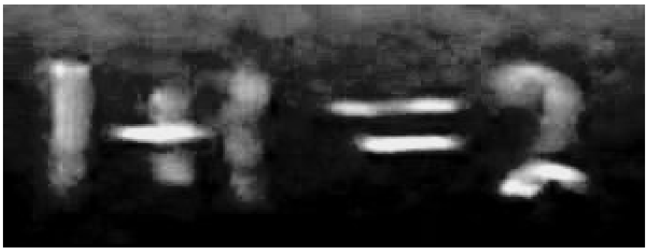
Laskutoimitusten operaattorinormeista

$\mathbb{R}$ami Luisto

27. tammikuuta 2012

Tiivistelmä

Tässä kirjoitelmassa määrittelemme vektoriavaruuksien väliselle lineaarikuvaukselle normin ja laskemme sen eksplisiittisesti yhteenlaskun erikoistapauksessa. Kirjoitelman motivaationa on ratkaista J. Koskisen vuonna 2006 esittämä avoin ongelma: "Hei $\mathbb{R}$ami, miks ton plussan itseisarvo on kaks?".



Sisältö

1 Johdanto

Reaalilukujen itseisarvo on hyödyllinen käsite, sillä voimme sen avulla puhua luvun 'suuruudesta' ottamatta kantaa sen merkkiin. Erityisen hyödyllinen käsite on silloin, kun haluamme mitata kahden luvun etäisyyttä. Jos kahden luvun erotus on suurempi kuin miljoona tai pienempi kuin miinus miljardi, haluamme sanoa että kyseiset luvut ovat kaukana toisistaan. Emme siis ole kiinnostuneita luvun merkistä vaan sen koosta, ja juuri tämän itseisarvo meille kertoo.

Voimme yleistää itseisarvon käsitteen myös n-ulotteisiin Euklidisiin vektoriavaruuksiin. Tällöin käytämme yleensä itseisarvon sijasta termiä normi. Euklidisissa avaruuksissa $\mathbb{R}^n$ normi edustaa vektorin pituutta ottamatta kantaa sen suuntaan. Tämän voi nähdä yleistyksenä sille, ettei itseisarvo 'näe' reaaliluvun merkkiä. Voimme nimittäin ajatella, että reaaliakselilla on täsmälleen kaksi suuntaa, "+" ja "−", ja itseisarvo jättää suunnan eli merkin huomiotta kuten yleisempi Euklidisen avaruuden normi.

Normin käsite osoittautuu kovin hyödylliseksi, ja huomaammekin että sen määrittelyyn ei tarvita välttämättä nimenomaan Euklidista avaruutta, vaan mikä tahansa reaalikertoinen vektoriavaruus käy. (Kaikki samaa dimensiota olevat normilla varustetut äärellisulotteiset vektoriavaruudet ovat eräässä[1] mielessä lähes samoja. Erityisesti siis vektoriavaruus joka ei ole 'oleellisesti' $\mathbb{R}^n$ on yleensä ääretönulotteinen.)

Määrittelemmekin tässä kirjoitelmassa normin käsitteen yleiselle (reaalikertoimiselle) vektoriavaruudelle. Tämän jälkeen katsomme miten voimme määritellä normeja vektoriavaruuksiin, jotka on muodostettu jo tunnetuista normilla varusteteuista vektoriavaruuksista. Lopuksi tulkitsemme reaalilukujen yhteenlaskun lineaarikuvauksena ja laskemme sille eksplisiittisen normin. Tätä lineaarikuvauksen normia voi kirjoittajan mielestä kutsua 'plussan itseisarvoksi'. Huomaammekin, että kyseinen normi riippuu tulkinnallamme siitä, miten valitsemme erääseen tuloavaruuteen normin. Täten vastauksemme J. Koskisen esittämään ongelmaan sanookin että kyse on oleellisesti tietyn normin valinnasta useiden luonnollisten ehdokkaiden joukosta.

2 Määritelmiä ja perustuloksia

Määrittelemme aluksi pikaisesti vektoriavaruuden sekä normin käsitteet. Klassinen esimerkki vektoriavaruudesta ja sen normista on Euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$ varustettuna standardinormilla

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}.$$

Määritelmä 2.1. Olkoon $(V, +, \cdot, \mathbf{0})$ nelikkö, missä V on joukko, merkki "+" on joukon V alkioiden yhteenlasku eli funktio

$$V \times V \to V, \quad (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \overset{+}{\mapsto} \mathbf{v} + \mathbf{w},$$

merkki "$\cdot$" on skalaarikertolasku eli funktio

$$\mathbb{R} \times V \to V, \quad (a, \mathbf{w}) \overset{\cdot}{\mapsto} a \cdot \mathbf{w}$$

[1] Normi tuottaa aina vektoriavaruuteen metriikan. Äärellisulotteisessa tapauksessa annetun vektoriavaruuden kaikkien normien antamat metriikat ovat topologisessa mielessä samat, eli ne antavat täsmälleen samat jatkuvuuskäsitteet.

ja $\mathbf{0} \in V$ on kiinnitetty vektoriavaruuden piste. Kutsumme tällaista nelikköä *vektoriavaruudeksi*, mikäli:

(V1) Laskutoimitus $+$ on joukossa vaihdannainen, liitännäinen ja $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ kaikilla $\mathbf{v} \in V$. Lisäksi jokaisella joukon V alkiolla $\mathbf{v}$ on vasta-alkio $-\mathbf{v}$.

(V2) Kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, $a, b \in \mathbb{R}$ pätee

$$\begin{aligned} a \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= a \cdot \mathbf{v} + a \cdot \mathbf{w}, \\ (a + b) \cdot \mathbf{v} &= a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{v} \text{ ja} \\ (ab) \cdot \mathbf{v} &= a \cdot (b \cdot \mathbf{v}). \end{aligned}$$

(V3) $1_{\mathbb{R}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$ kaikilla $\mathbf{v} \in V$, missä $1_{\mathbb{R}}$ on reaalilukujen alkio 1.

Kutsumme tässä yhteydessä joukon V alkioita *vektoreiksi*, kiinnitettyä pistettä $\mathbf{0} \in V$ *origoksi* ja skalaaritulon määritelmässä käytettyjä reaalilukuja skalaareiksi. Mikäli $a \neq 0$ ja $\mathbf{v} \in V$, niin merkitsemme

$$\frac{\mathbf{v}}{a} := (a^{-1}) \cdot \mathbf{v}.$$

Määritelmä 2.2. Vektoriavaruuden V *normi* on kuvaus

$$\| \cdot \|_V : V \to \mathbb{R}^+,$$

jolle pätee, että kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, $a \in \mathbb{R}$

(N1) $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|_V \leq \|\mathbf{v}\|_V + \|\mathbf{w}\|_V$.

(N2) $\|a \cdot \mathbf{v}\|_V = |a| \|\mathbf{v}\|_V$.

(N3) $\|\mathbf{v}\|_V = 0$ jos ja vain jos $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Kutsumme normilla varustettua vektoriavaruutta *normiavaruudeksi*. Jatkossa oletamme että V ja W ovat normiavaruuksia normeilla $\| \cdot \|_V$ ja $\| \cdot \|_W$.

Lineaarialgebran ehkä tärkein käsite on lineaarikuvaus. Voisi suorastaan sanoa, että lineaarialgebran mielenkiinnon kohteena ja menetelmien toiminta-alueena on lineaarikuvausten tutkiminen. Annamme seuraavassa lineaarikuvauksen määritelmän ja huomaamme, että saamme kahden normiavaruuden välisten lineaarikuvausten joukosta normiavaruuden luonnollisella tavalla.

Määritelmä 2.3. Sanomme, että kuvaus $T : V \to W$ on *lineaarikuvaus* (tai adjektiivina *lineaarinen*), mikäli seuraavat ehdot ovat voimassa kaikille $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, $a \in \mathbb{R}$.

(L1) $T(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w})$

(L2) $T(a \cdot \mathbf{v}) = a \cdot T(\mathbf{v})$

Huomaamme, että voimme määritellä joukkoon

$$L(V, W) := \{T : V \to W \mid \text{ kuvaus } T \text{ on lineaarinen } \} \tag{1}$$

vektoriavaruuden laskutoimitukset laskemalla lineaarikuvauksia 'pisteittäin' yhteen. Tarkemmin sanottuna meillä on seuraava lause.

Lause 2.4. *Olkoon* $L(V,W)$ *määritelty kuten kaavassa* (1). *Mikäli* $T, S \in L(V,W)$ *ja* $a \in \mathbb{R}$ *niin määrittelemme*

$$\begin{aligned}(T+S)\colon V \to W, &\quad (T+S)(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v}) + S(\mathbf{w}),\\ (a\cdot T)\colon V \to W, &\quad (a\cdot T)(\mathbf{v}) = a\cdot T(\mathbf{v}),\ \textit{ja}\\ \mathbf{0}_L\colon V \to W, &\quad \mathbf{0}_L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W.\end{aligned}$$

Näillä laskutoimituksilla varustettuna joukko $L(V,W)$ *muodostaa reaalikertoimisen vektoriavaruuden.*

Todistus. Lauseen todistus on suoraviivainen vektoriavaruuden määritelmän läpikäynti ja palautuu siihen että W on vektoriavaruus.[2] □

Määrittelemme seuraavaksi normin vektoriavaruuteen $L(V,W)$. Antamamme normi on alalla standardivalinta.

Määritelmä 2.5. Olkoon $T \in L(V,W)$. Asetamme

$$\|T\|_L = \sup\{\|T(\mathbf{v})\|_W : \|\mathbf{v}\|_V \le 1\}.$$

Mikäli V ja W ovat ääretönulotteisia on niiden välistä lineaarikuvausta tapana kutsua *operaattoriksi.* Edelleen operaattorien muodostaman avaruuden normia nimitetään yleensä *operaattorinormiksi.* Vaikka päätuloksemme koskeekin äärellisulotteista tilannetta, kutsumme silti kuvausta $\|\cdot\|_L$ operaattorinormiksi, sillä "laskutoimituksen operaattorinormi" on raflaavampi nimi kuin "normi joka saadaan laskutoimitukselle kun tulkitsemme sen lineaarikuvauksena".

Näytetään nyt, että operaattori**normi** ansaitsee nimensä.

Lause 2.6. *Määritelmässä 2.5 muodostettu kuvaus*

$$\|\cdot\|_L\colon L(V,W) \to \mathbb{R}_+$$

on normi.

Todistus. Käymme läpi määritelmän 2.2 ehdot (N1) - (N3). Käytämme useammassa kohtaa huomiota, että jos $\mathbf{0}_V \ne \mathbf{v} \in V$, niin

$$\left\| \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_V} \right\|_V = 1.$$

Erityisesti operaattorinormin määritelmän perusteella aina jos $\mathbf{0}_V \ne \mathbf{v} \in V$, niin

$$\left\| T\left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_V} \right) \right\|_W \le \|T\|_L.$$

(N1) Olkoot $T, S \in L(V,W)$ ja $\mathbf{v} \in V$. Jos $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$, niin lineaarikuvausten perusominaisuuksien nojalla

$$T(\mathbf{v}) = S(\mathbf{v}) = (S+T)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$$

ja täten selvästi

$$\|T+S\|_L \le \|T\|_L + \|S\|_L.$$

[2] Emme itse asiassa tarvitse oletusta, että V on vektoriavaruus.

Oletetaan siis, että $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$ ja $\|\mathbf{v}\|_V \leq 1$, jolloin

$$\begin{aligned}
\|(T+S)(\mathbf{v})\|_W &= \|T(\mathbf{v}) + S(\mathbf{v})\|_W \\
&\leq \|T(\mathbf{v})\|_W + \|S(\mathbf{v})\|_W \\
&\leq \|T\|_L + \|S\|_L \,,
\end{aligned}$$

eli

$$\|(T+S)(\mathbf{v})\|_W \leq \|T\|_L + \|S\|_L$$

mielivaltaisella $\mathbf{v} \in V$, $\|\mathbf{v}\|_V \leq 1$. Valitsemalla supremum yli kaikkien tällaisten vektorien $\mathbf{v}$, näemme että

$$\|T+S\|_L \leq \|T\|_L + \|S\|_L \,.$$

(N2) Jos $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ ja $a \in \mathbb{R}$, niin merkitsemme $a \cdot A := \{ax \mid x \in A\}$. Supremumin perusominaisuuksien nojalla (Analyysi I) pätee, että jos A on ylhäältä rajoitettu, niin $\sup(a \cdot A) = a \sup A$.

Olkoon $T \in L(V,W)$ ja $a \in \mathbb{R}$. Nyt äskeisen perusteella näemme, että

$$\begin{aligned}
\|a \cdot T\|_L &= \sup\{\|(a \cdot T)(\mathbf{v})\|_W : \mathbf{v} \in V, \|\mathbf{v}\|_V \leq 1\} \\
&= \sup\{\|a \cdot T(\mathbf{v})\|_W : \mathbf{v} \in V, \|\mathbf{v}\|_V \leq 1\} \\
&= \sup\{|a|\|T(\mathbf{v})\|_W : \mathbf{v} \in V, \|\mathbf{v}\|_V \leq 1\} \\
&= |a| \sup\{\|T(\mathbf{v})\|_W : \mathbf{v} \in V, \|\mathbf{v}\|_V \leq 1\} \\
&= |a|\| \cdot T\|_L.
\end{aligned}$$

(N3) Jos $T = \mathbf{0}_L$, niin on helppo nähdä että $\|T\|_L = 0$.

Oletetaan, että $T \in L(V,W)$ ja $\|T\|_L = 0$. Näytämme että tällöin T on nollakuvaus. Olkoon $\mathbf{v} \in V$. Mikäli $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$, niin lineaarikuvausten perusominaisuuksion nojalla $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$. Jos taas $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$, niin

$$\begin{aligned}
\|T(\mathbf{v})\|_W &= \left\| T\left(\|\mathbf{v}\|_V \cdot \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_V} \right) \right\|_W \\
&= \left\| \|\mathbf{v}\|_V \cdot T\left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_V} \right) \right\|_W \\
&= \|\mathbf{v}\|_V \left\| T\left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_V} \right) \right\|_W \\
&\leq \|\mathbf{v}\|_V \|T\|_L \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Täten $\|T(\mathbf{v})\|_W = 0$, joten $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$ sillä $\| \cdot \|_W$ on normi. Koska T kuvaa mielivaltaisen vektorin maalipuolen nollavektoriksi, on T vakiokuvaus nolla eli vektoriavaruuden $L(V,W)$ nolla-alkio $\mathbf{0}_L$.

Täten kuvaus $\| \cdot \|_L$ on normi.

□

Viimeisenä aputuloksena ennen kirjoitelman huipentumaa käymme läpi kahden normiavaruuden tulona muodostetun joukon rakennetta. Joukkojen V ja W karteesinen tulo on joukko

$$V \times W := \{(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mid \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W\}.$$

Voisimme määritellä tuloon vektoriavaruuden rakenteen ja normin usealla eri tavalla, mutta luontevimmat keinot ovat seuraavat.

Määritelmä 2.7. Määrittelemme karteesiseen tuloon $V \times W$ laskutoimitukset ja origon asettamalla

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1) + (\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2) =& (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2), \\ a \cdot (\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1) =& (a \cdot \mathbf{v}_1, a \cdot \mathbf{w}_1) \text{ ja} \\ \mathbf{0}_{V \times W} :=& (\mathbf{0}_V, \mathbf{0}_W). \end{aligned}$$

On suoraviivaista tarkistaa, että saamme tuloksena vektoriavaruuden.

Tuloavaruuden normin voi valita luonnollisesti useammalla eri tavalla. Esitämme seuraavassa kolme yleisintä keinoa. Näistä normeista tutuin lienee $\|\cdot\|_2$ joka antaa tapauksessa $V = W = \mathbb{R}$ tavallisen Euklidisen normin. Toiset kaksi normia saattavat vaikuttaa vierailta, mutta ne ovat joissain tilanteissa hyvin luonnollisia valintoja tuloavaruuden normiksi.

Määritelmä 2.8. Määrittelemme tuloavaruuteen $V \times W$ seuraavat normit.

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 \colon V \times W \to \mathbb{R}_+, &\quad \|(\mathbf{v}, \mathbf{w})\|_1 = \|\mathbf{v}\|_V + \|\mathbf{w}\|_W \\ \|\cdot\|_2 \colon V \times W \to \mathbb{R}_+, &\quad \|(\mathbf{v}, \mathbf{w})\|_2 = \sqrt{\|\mathbf{v}\|_V^2 + \|\mathbf{w}\|_W^2} \\ \|\cdot\|_\infty \colon V \times W \to \mathbb{R}_+, &\quad \|(\mathbf{v}, \mathbf{w})\|_\infty = \max\{\|\mathbf{v}\|_V, \|\mathbf{w}\|_V\}. \end{aligned}$$

Jälleen on suoraviivaista tarkistaa että kyseiset kuvaukset ovat normeja.

3 Päätulos

Haluamme nyt laskea viimein 'plussan itseisarvon'. Tämä on työkaluillamme mahdollista, kunhan tulkitsemme 'plussan' lineaarikuvauksena ja itseisarvon lineaarikuvauksen normina. Huomaamme, että operaattorinormin määritelmä riippuu sekä lähtö- että maalipuolen normeista. Tämän johdosta tulemme havaitsemaan että 'plussan itseisarvo' riippuu tulkinnallamme erään tuloavaruuden normin valinnasta.

Todistamme ensin vielä yhden lemman.

Lemma 3.1. *Olkoon* $\|\cdot\|$ *jokin määritelmän 2.8 normeista* $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ *tai* $\|\cdot\|_\infty$ *tuloavaruudelle* $V \times W$. *Mikäli* $\|(\mathbf{v}, \mathbf{w})\| \leq 1$ *jollain* $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in V \times W$, *niin* $\|\mathbf{v}\|_V \leq 1$ *ja* $\|\mathbf{w}\|_W \leq 1$.

Todistus. Väite on symmetrinen vektoreiden $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ suhteen, joten todistamme sen vain vektorille $\mathbf{v}$. Huomaammekin heti, että

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{v}\|_V \leq \|\mathbf{v}\|_V + \|\mathbf{w}\|_W = \|(\mathbf{v}, \mathbf{w})\|_1, \\ &\|\mathbf{v}\|_V = \sqrt{\|\mathbf{v}\|_V^2} \leq \sqrt{\|\mathbf{v}\|_V^2 + \|\mathbf{w}\|_W^2} = \|(\mathbf{v}, \mathbf{w})\|_2 \text{ ja} \\ &\|\mathbf{v}\|_V \leq \max\{\|\mathbf{v}\|_V, \|\mathbf{w}\|_W\} = \|(\mathbf{v}, \mathbf{w})\|_\infty. \end{aligned}$$

Tämä todistaa väitteen. □

Seuraava esimerkki ja sitä seuraava lause muodostavat kirjoitelman päätuloksen.

Esimerkki 3.2. Voimme laskea yhteenlaskulle normin, kunhan tulkitsemme yhteenlaskun ensin kahden reaalikertoimisen vektoriavaruuden väliseksi kuvaukseksi. Tämän voimme tehdä varsin luonnollisesti asettamalla

$$S\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad S(x, y) = x + y.$$

Reaalilukujen laskutoimitusten perusominaisuuksien nojalla huomaamme varsin helposti että S on lineaarikuvaus.

Tilanteessamme $V = W = \mathbb{R}$, joten $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|_W = |\cdot|$. Merkitsemme aluksi tuloavaruuden $V \times W$ normia merkillä $\|\cdot\|_\phi$, missä $\phi \in \{1, 2, \infty\}$, koska alkutarkasteluissa ei ole väliä mitä määritelmän 2.8 normia käytämme kuvauksen S lähtöpuolella. Merkitsemme operaattorinormia merkillä $\|\cdot\|_L$, vaikka operaattorinormi riippuu lähtöpuolen normin valinnasta. Käytössä oleva operaattorinormi on kuitenkin selvä käyttöyhteydestä.

Lineaarikuvauksen S määritelmän sekä kolmioepäyhtälön perusteella näemme, että

$$|S(x, y)| = |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Toisaalta kaikille $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, joilla $\|(x, y)\|_\phi \leq 1$, pätee lemman 3.1 perusteella että $|x| \leq 1$ ja $|y| \leq 1$. Yhdistämällä nämä kaksi havaintoa huomaamme että välttämättä $\|S\|_L \leq 2$.

Meillä on nyt siis yläraja lineaarikuvauksen S operaattorinormille. Laskemme tarkan arvon normien $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ja $\|\cdot\|_\infty$ suhteen. Käytämme hieman matemaattista kikkailua jotta laskujen mekaniikka helpottuu. Ensinnäkin, lineaarialgebran ja analyysin perusominaisuuksista seuraa, että tapauksessamme $|S(x, y)| = \|S\|_L$ jollain $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, jolla $\|(x, y)\|_\phi = 1$. (Eli meidän ei tarvitse tutkia vektoreita, joilla $\|(x, y)\|_\phi < 1$ vaan riitttää tarkastella yksikköympyrää. Lisäksi supremum myös saavutetaan jossain yksikköympyrän pisteessä.)

$\|\cdot\|_1$: Jos käytämme lähtöpuolella normia $\|\cdot\|_1$, niin tason yksikköympyrä näyttää neliöltä, jonka kärkipisteet ovat pisteissä $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$. Suoralla laskulla (tai geometrisella symmetrisyysargumentilla) huomaamme, että kaikissa kyseisen yksikköympyrän pisteissä (x, y) pätee, että $|x| + |y| = 1$, joten erityisesti normin $\|\cdot\|_1$ tapauksessa $\|S\|_L = 1$. Korvaamalla $S =: +$ ja merkitsemällä operaattorinormia itseisarvolla[3] saamme siis $|+| = 1$.

$\|\cdot\|_2$: Mikäli käytössämme on lähtöpuolella normi $\|\cdot\|_2$, niin tilanne muuttuu. Aiempien laskujen perusteella tiedämme että edelleen välttämättä $\|S\|_L \leq 2$, mutta nyt epäyhtälö on aito.

Tällaisia pistepareja ovat täsmälleen pisteet $(\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$. Etsimällä funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |\sin x + \cos x|$ suurin arvo $\sqrt{2}$ voimme päätellä, että kun tuloavaruuden normiksi valitaan $\|\cdot\|_2$, on kuvauksen S operaattorinormi $\sqrt{2}$, eli tässä tapauksessa eri merkinnöillä $|+| = \sqrt{2}$.

$\|\cdot\|_\infty$: Jos tuloavaruuden normiksi on valittu $\|\cdot\|_\infty$, niin $\|(1, 1)\|_\phi \leq 1$ ja $|S(1, 1)| = 2$. Täten $\|S\|_L = 2$, eli $|+| = 2$.

[3] Kuten johdannossa mainitsimme, normi on itseisarvon yleistys joten merkintä on luonnollinen.

Huomaamme siis, että kolmesta normistamme ainoastaan normin $\|\cdot\|_\infty$ (tunnetaan myös nimellä sup-normi) valinta saa aikaan tilanteen joka esiintyy J. Koskisen kysymyksessä. Huomaamme, että kyseessä on eräässä mielessä ainut normi, joka antaa halutun tuloksen. Koska normeja voi aina skaalata positiivisella vakiolla, kiinnitämme skaalauksen tarkastelemalla ainoastaan normeja, jotka antavat yksikkövektoreiden pituudeksi 1.

Lause 3.3. *Olkoon $\|\cdot\|_V$ jokin Euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^2$ normi, jolle pätee että $\|(0,1)\|_V = \|(1,0)\|_V = 1$. Olkoon lisäksi $\|\cdot\|_L$ määritelmän 2.5 antama avaruuteen $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ liittyvä operaattorinormi. (Maalipuolella standardi itseisarvon antama normi.)*

Nyt lineaarikuvaukselle

$$S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad S(x,y) = x + y$$

pätee, että $\|S\|_L \leq 2$ ja yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|_\infty$.

Todistus. Sivuutamme todistuksen yksityiskohdat. Väite nojaa havaintoon, jonka mukaan normiavaruuksien suljetut yksikkökuulat ovat aina konvekseja sekä skaalaukseemme joka kiinnittää pisteet $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ normin yksikköympyrälle. Lisäksi huomaamme että normin määrää täysin sen määrittelemä yksikköympyrä. □

Täten voimme vastata J. Koskisen esittämään kysymykseen:

J.K.: “Hei $\mathbb{R}$ami, miks ton plussan itseisarvo on kaks?”

$\mathbb{R}$.L.: “Koska summakuvauksen lähtöavaruuteen oli valittu sup-normi.“