KANDIDAATINTUTKIELMA
KVASIHYPERBOLINEN METRIIKKA

$\mathbb{R}$AMI LUISTO

TIIVISTELMÄ. Tässä tutkielmassa esittelen euklidisten avaruuksien aidoissa alueissa määritellyn kvasihyperbolisen metriikan k_D kuvauksena ja todistan sen metriikaksi. Lisäksi esitän perustulokset metriikan k_D arvioimisesta avaruuden $\mathbb{R}^n, n \geq 2$ tavallisen metriikan avulla. Määrittelen myös sikarialueet ja esitän niiden yhteyksiä kvasihyperboliseen metriikkaan.

HELSINGIN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
8. toukokuuta 2009

Sisältö

1. Johdanto

Klassisessa kompleksianalyysissä Möbius-kuvaukset muodostavat tärkeän kuvausperheen. Kompleksitason yksikkökiekossa ja puolitasossa määritelty hyperbolinen metriikka h_D on hyödyllinen työkalu Möbius-kuvausten tutkimuksessa. Tässä tutkielmassa esiteltävä kvasihyperbolinen metriikka k_D voidaan tulkita hyperbolisen metriikan yleistykseksi, sillä vaikka kvasihyperbolinen metriikka yhtyy hyperboliseen metriikkaan vain puolitason tapauksessa, niin yksikkökiekossa D pätee kuitenkin arvio $k_D(x, y) \leq h_D(x, y) \leq 2k_D(x, y)$ kaikilla yksikkökiekon pisteillä x ja y.

Kvasihyperbolisen metriikan arvioitavuus euklidisen metriikan avulla on osoittautunut näppäräksi tavaksi karakterisoida avaruuden $\mathbb{R}^n$ sikarialueet, [GeOs] ja [Vuo88]. Myös kvasikonformisen homogeenisuuden tutkimuksessa on löytynyt käyttöä kvasihyperboliselle metriikalle, [GePa].

Kvasihyperbolista metriikkaa on tutkittu 1970-luvulta koska sen on havaittu olevan huomattavan hyödyllinen käsite analyysin tutkimuksessa. Käsitteen määritteli ensimmäisenä Frederick W. Gehring oppilaineen, [GePa].

2. Perusominaisuuksia

2.1. **Merkintöjä.** Tulemme koko tutkielman ajan tarkastelemaan euklidista avaruutta $\mathbb{R}^n$ sekä sen osajoukkoja. Oletamme että, $n \geq 2$. Mikäli avaruuden $\mathbb{R}^n$ aito epätyhjä osajoukko D on alue, eli avoin ja yhtenäinen, kutsumme sitä *aidoksi alueeksi* avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Kahden avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteen x ja y etäisyyttä euklidisessa metriikassa merkitään $d(x, y)$ ja avaruuden pisteen x etäisyyttä epätyhjästä joukosta $D \subset \mathbb{R}^n$ euklidisessa metriikassa merkitään

$$d(x, D) = \inf\{d(x, a) \mid a \in D\}.$$

Joukon D reunaa eli niiden pisteiden joukkoa, joiden jokainen kuulaympäristö leikkaa sekä joukkoa D että sen komplementtia merkitään ∂D.

Käytetään seuraavia lyhenteitä tutkielman kannalta tärkeistä joukoista:

$$I = [0, 1], \quad \mathbb{R}_+ = [0, \infty[\quad \text{ja}$$

$$\Gamma_{x,y} = \{\gamma\colon I \to D \mid \gamma(0) = x, \gamma(1) = y, \gamma \text{ paloittain } C^1\text{-polku}\},$$

missä D on avaruuden $\mathbb{R}^n$ aito alue. Lauseissa ja määritelmissä puhutaan aina jostakin tietystä kiinteästä aidosta alueesta, joten emme joudu epäselvyyksiin polkuperheestä $\Gamma_{x,y}$ puhuessamme.

Polun γ euklidista pituutta merkitsemme $l(\gamma)$. Mikäli a ja b ovat pisteitä polun γ kuvalla, niin merkitään näiden pisteiden väliin jäävää polun osaa $\gamma(a, b)$. Jos $\gamma_1 \in \Gamma_{x,y}$ ja $\gamma_2 \in \Gamma_{y,z}$, niin merkitsemme näiden polkujen kompositiota $\gamma_1\gamma_2 \in \Gamma_{x,z}$.

2.2. **Määrittely.** Kompleksitasossa yksikkökiekon D hyperbolinen metriikka h voidaan määritellä asettamalla

$$h_D(x, y) = \inf_{\gamma \in \Gamma_{x,y}} \int_\gamma \rho(s)|ds|,$$

missä $\rho(s) = \dfrac{2}{1 - |s|^2}$. Joissain lähteissä hyperbolinen metriikka määritellään vastaavalla tavalla, mutta kertoimella yksi, esimerkiksi [Lehto]. Syitä kertoimen kaksi valintaan löytyy muunmuassa artikkelista [Mil].

Koska määritelmä on annettu yksikkökiekossa polkuintegraalin avulla, tuntuisi luontevalta että määritelmän voisi yleistää kaikkiin alueisiin joissa integraalin voi mielekkäästi määritellä ja saamme aikaan metriikan. Tämä ajatus johtaa seuraavaan käsitteeseen.

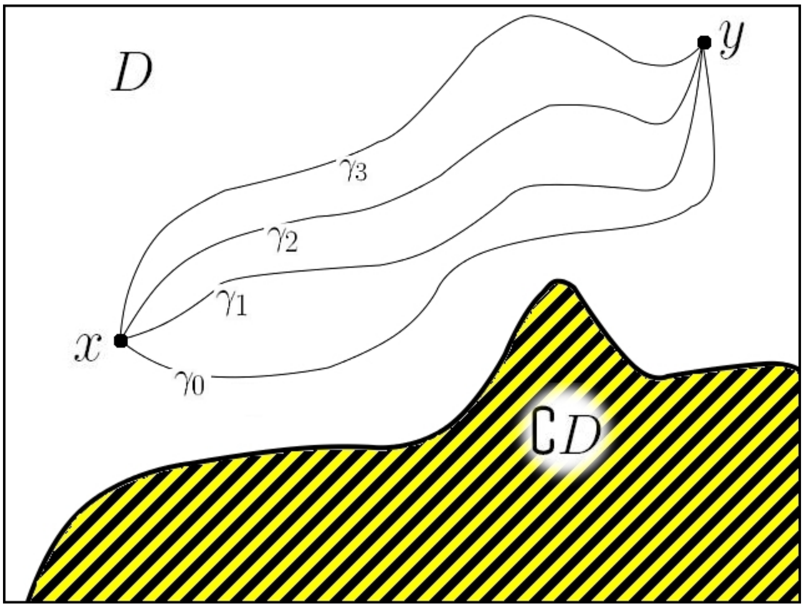
Määritelmä 1. *Olkoon D avaruuden $\mathbb{R}^n$ aito alue. Määritellään kuvaus $k_D\colon D \times D \to \mathbb{R}_+$ asettamalla*

$$k_D(x, y) = \inf_{\gamma \in \Gamma_{x,y}} \int_\gamma d(s, \partial D)^{-1}|ds|$$

kaikilla $x, y \in D$.

Joukko D on alue, joten se on avoin, eli se ei sisällä yhtään reunansa pistettä. Täten $d(x, \partial D) > 0$ kaikilla $x \in D$. Erityisesti poluilla $\gamma\colon I \to D$ pätee $d(\gamma(t), \partial D) > 0$ kaikilla $t \in I$. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoin yhtenäinen osajoukko on paloittain C^1-polkuyhtenäinen, joten jokainen osajoukon D pistepari voidaan yhdistää paloittain C^1-polulla. Näistä seuraa, että kuvauksen määritelmässä esiintyvä integraali voidaan määritellä jokaisella joukon D pisteparilla. Integraali otetaan kaarenpituuden suhteen, ja etäisyysfunktio on aidosti positiivinen, joten jokainen integraali on positiivinen. Koska joukko D oletettiin epätyhjäksi, niin infimum integraaleista on äskeisen perusteella olemassa sekä väliltä $[0, \infty[$. Lisäksi oletimme joukon D epätyhjäksi, joten kaikille joukon D pisteille x pätee $d(x, \partial D) < \infty$. Kuvauksemme on siis hyvinmääritelty.

Infimumin ottaminen voidaan ajatella siten, että metriikkamme haluaa minimoida kyseessä olevan painotetun polun pituuden. Reunan etäisyyden käänteisarvo painokertoimenaan voimme siis ajatella että kvasihyperbolinen metriikka 'etsii' polkua joka on yhtä aikaa mahdollisimman lyhyt euklidisessa mielessä sekä mahdollisimman kaukana reunasta. Esimerkiksi kuvassa 1 olevista poluista γ_3 olisi luultavasti painotetun pituuden mukaan lyhin.



Kuva 1

Kvasihyperbolinen metriikka peräti 'saavuttaa' infimuminsa jollakin perheen $\Gamma_{x,y}$ polulla. Toisin sanoen voidaan osoittaa, että jokaista aidon alueen pisteparia x, y kohti on olemassa niin kutsuttu *kvasihyperbolinen geodeesi*, $\gamma_g \in \Gamma_{x,y}$, jolle pätee, että

$$k_D(x, y) = \int_{\gamma_g} \frac{|ds|}{d(s, \partial D)}.$$

Tämä antaisi myös yhden tavan osoittaa metriikan ehto (M3).

Lause 1. *Kuvaus k_D on metriikka.*

Huomautus 1. *Koska määritelmä on annettu käyttämällä integraalia yli kaarenpituuden, Lauseen 1 todistus vaatii polkuintegroinnin perustuloksia. Näiden tulosten tässä tutkielmassa todistaminen veisi huomattavasti tilaa, ja ne löytyvät vektorianalyysin perusoppikirjoista, joten sivuutan todistukset.*

Todistus: Todistetaan väite metriikan ehto kerrallaan. Olkoot x, y ja z joukon D pisteitä.

$(M1)$: Väite: $k_D(x,z) \leq k_D(x,y) + k_D(y,z)$. Olkoot $\gamma_1 \in \Gamma_{x,y}$ ja $\gamma_2 \in \Gamma_{y,z}$. Nyt $\gamma_1\gamma_2$ on paloittain C^1-polku pisteestä x pisteeseen z. Tällöin

$$k_D(x,z) = \inf_{\gamma\in\Gamma_{x,z}} \int_{\gamma} \frac{|ds|}{d(s,\partial D)} \leq \int_{\gamma_1\gamma_2} \frac{|ds|}{d(s,\partial D)}. \tag{2.1}$$

Palauttamalla integroiminen integrointiin yli välin saamme integraalille yli polkujen komposition arvion

$$\int_{\gamma_1\gamma_2} \frac{|ds|}{d(s,\partial D)} \leq \int_{\gamma_1} \frac{|ds|}{d(s,\partial D)} + \int_{\gamma_2} \frac{|ds|}{d(s,\partial D)}. \tag{2.2}$$

Kohdat (2.1) ja (2.2) yhdistämällä saamme mielivaltaisille poluillemme $\gamma_1 \in \Gamma_{x,y}$ ja $\gamma_2 \in \Gamma_{y,z}$ epäyhtälön

$$k_D(x,z) \leq \int_{\gamma_1} d(s,\partial D)^{-1}|ds| + \int_{\gamma_2} d(s,\partial D)^{-1}|ds|,$$

ja koska infimumin ottaminen säilyttää järjestyksen, ja epäyhtälö pätee mielivaltaisille poluille γ_1 ja γ_2, saamme

$$k_D(x,z) \leq k_D(x,y) + k_D(y,z).$$

$(M2)$: Väite: $k_D(x,y) = k_D(y,x)$. Olkoon $\gamma_0 \in \Gamma_{x,y}$. Merkitään polun γ_0 käänteispolkua $\gamma_0^{\leftarrow}$. Huomataan, että

$$\int_{\gamma_0} d(s,\partial D)^{-1}|ds| = \int_{\gamma_0^{\leftarrow}} d(s,\partial D)^{-1}|ds|. \tag{2.3}$$

Kuten äskeisessä kohdassa saamme

$$k_D(x,y) = \inf_{\gamma\in\Gamma_{x,y}} \int_{\gamma} d(s,\partial D)^{-1}|ds| \leq \int_{\gamma_0^{\leftarrow}} d(s,\partial D)^{-1}|ds|. \tag{2.4}$$

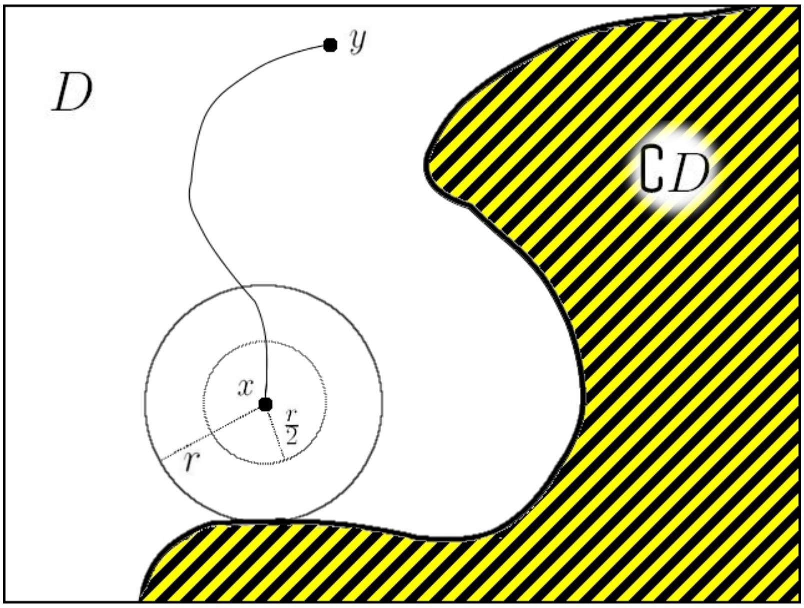
Tämän jälkeen voimme kohtia (2.3) ja (2.4) hyödyntämällä ja infimumin ottamalla todeta, että $k_D(x,y) \leq k_D(y,x)$, sillä polku γ_0 oli valittu mielivaltaisesti. Tämä päättelyketju oli symmetrinen pisteiden x ja y järjestyksen suhteen, joten identtisellä päättelyllä saamme, että myös $k_D(y,x) \leq k_D(x,y)$, joten välttämättä $k_D(x,y) = k_D(y,x)$.

$(M3)$: Väite: $k_D(x,y) = 0$, jos ja vain jos $x = y$.

Jos $x = y$, niin väite on selvä, koska vakiopolku antaa painotetulle integraalille arvon nolla, jolloin $k_D(x,y) = 0$.

Olkoon siis $k_D(x,y) = 0$. Kvasihyperbolisen metriikan määritelmän nojalla tämä tarkoittaa täsmälleen sitä, että mielivaltaista positiivista reaalilukua ϵ kohti löytyy paloittain jatkuva polku γ_ϵ, jolle pätee $\int_{\gamma_\epsilon} d(s,\partial D)^{-1}|ds| < \epsilon$. Metriikan saadaksemme väitänkin nyt, että välttämättä $x = y$.

Vastaoletus: $x \neq y$. Avaruus $\mathbb{R}^n$ on Hausdorffin avaruus, ja D sen avoin osajoukko, joten löydämme pisteelle x kuulaympäristön, jolle pätee $B(x,r) \subset D, r > 0$, ja $y \notin B(x,r)$. Merkitään $U_x := B(x, \frac{r}{2})$. Jos $a \in U_x$, niin saamme kuvaa 2 tarkastelemalla ja euklidisen metriikan kolmioepäyhtälöä soveltamalla epäyhtälön



Kuva 2

$$d(a,\partial D) \leq d(a,x) + d(x,\partial D) < \frac{r}{2} + d(x,\partial D).$$

Olkoon nyt β polun γ_ϵ se (aito) alkusegmentti, joka sisältyy joukkoon $\overline{U}_x$. Käyttämällä hyväksi tietoa, että integraali yli osapolun on enintään integraali yli koko polun sekä äskeistä huomiota saamme

$$\int_{\gamma\epsilon} d(s,\partial D)^{-1}|ds| \geq \int_{\beta} d(s,\partial D)^{-1}|ds| \geq \int_{\beta} (\frac{r}{2} + d(x,\partial D))^{-1}|ds|$$
$$= l(\beta)(\frac{r}{2} + d(x,\partial D))^{-1} \geq \frac{r}{2}(\frac{r}{2} + d(x,\partial D))^{-1} > 0.$$

Luku $\frac{r}{2}(\frac{r}{2}+d(x,\partial D))^{-1}$ on ainoastaan pisteistä x ja y riippuva vakio, joten äskeisen perusteella valittaessa

$$\epsilon < \frac{1}{2}\frac{r}{2}(\frac{r}{2} + d(x,\partial D))^{-1}$$

saamme ristiriidan.

Kuvaus k_D on siis metriikka.

2.3. **Arviointiominaisuuksia.** Olemme siis saaneet määriteltyä metriikan ehdot täyttävän kuvauksen. Kutsumme avaruuden $\mathbb{R}^n$ aitoon alueeseen D liittyvää metriikkaa k_D alueen D *kvasihyperboliseksi metriikaksi.* Määrittelyn jälkeen siirrymme tutkimaan metriikan hyödyllisiä ominaisuuksia. Kvasihyperbolisen metriikan määrittelemä joukon D topologia on sama kuin joukon D relatiivitopologia avaruuden $\mathbb{R}^n$ tavallisessa topologiassa. Puhtaasti topologisesta näkökulmasta kvasihyperbolinen metriikka ei siis ole erityisen mielenkiintoinen. Osoittautuu kuitenkin, että metriikkamme arvioitavuus euklidisen avaruuden tavallisen metriikan avulla liittyy joukon D tärkeisiin analyyttisiin rakenteisiin. Ennen kuin jatkamme tätä ajatusketjua, todistamme, että metriikkaamme voi aina arvioida alhaaltapäin avaruuden $\mathbb{R}^n$ tavallisen metriikan avulla. Ensimmäiseksi todistamme pienen apulauseen.

Lemma 1. *Olkoot $k > 1$ ja $0 < r$. Tällöin*

$$k^r - 1 \geq \log k^r. \tag{2.5}$$

Todistus: Väite on yhtäpitävää väitteen

$$f\colon [1,\infty[\to \mathbb{R}, \qquad f(k) := k^r - 1 - \log k^r \geq 0$$

kanssa. Väitteen todistamiseksi tutkitaan kuvauksen f derivaattaa välillä $]1,\infty[$:

$$f'(k) = rk^{r-1} - \frac{rk^{r-1}}{k^r} = \underbrace{rk^{-1}}_{>0}\underbrace{(k^r - 1)}_{>0,\text{ kun } k>1} > 0.$$

Kuvaus f on äskeisen perusteella aidosti kasvava välillä $]1,\infty[$ ja $f(1) = 1 - 0 - 1 = 0$, joten väite pätee.

Lause 2. *Olkoon D avaruuden $\mathbb{R}^n$ aito alue. Tällöin*

$$k_D(x,y) \geq \left|\log\frac{d(y,\partial D)}{d(x,\partial D)}\right| \tag{2.6}$$

ja

$$k_D(x,y) \geq \log\left(\frac{d(x,y)}{d(x,\partial D)}+1\right) \tag{2.7}$$

kaikilla $x, y \in D$.

Todistus: Aloitetaan todistamalla epäyhtälö (2.6).

Olkoot x ja y aidon alueen D pisteitä, sekä $\gamma \in \Gamma_{x,y}$. Merkitään koko todistuksen ajan

$$a = d(x,\partial D), \quad b = d(y,\partial D), \quad d(t) = d(\gamma(t),\partial D).$$

Todistus on symmetrinen pisteiden x ja y järjestyksen suhteen, joten voimme olettaa, että $a \leq b$. Mikäli olisi $a = b$, niin väite olisi tosi, sillä $\log 1 = 0$. Oletetaan siis, että $a < b$.

Olkoon $m \in \mathbb{N}, m \neq 0$. Merkitään

$$t_j = \min\left\{ t \in [0,1] \,\middle|\, d(t) = c_j = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{j}{m}} \right\}.$$

Luvuille t_j toteamme seuraavat ominaisuudet

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m \leq 1, \tag{2.8}$$

$$d(t_j) = c_j \qquad \text{ja} \tag{2.9}$$

$$\text{kaikilla } t \in [0,t_j] \text{ pätee } d(t) \leq c_j. \tag{2.10}$$

Merkitään polun γ rajoittumaa välille $[t_{j-1}, t_j]$ merkillä γ_j. Käyttämälle luvuille t_j todettuja ominaisuuksia sekä Lemman 1 antamaa epäyhtälöä näemme, että

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_j} \frac{|ds|}{d(s,\partial D)} &= \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{|dt|}{d(t)} \overset{(2.10)}{\geq} \int_{\gamma_j} \frac{|ds|}{c_j} = c_j^{-1} \cdot l(\gamma_j) \\
&\overset{(2.9)}{\geq} \frac{c_j - c_{j-1}}{c_j} = \frac{\cancel{a}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{j}{m}} - \cancel{a}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{j-1}{m}}}{\cancel{a}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{j}{m}}} = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}} - 1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}}} \\
&= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{m}}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right) \overset{(2.5)}{\geq} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{m}} \log\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}} \\
&= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{m}} \log\left(\frac{a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{j}{m}}}{a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{j-1}{m}}}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{m}} \log\frac{c_j}{c_{j-1}}.
\end{aligned}$$

Nyt kohdan (2.8) perusteella avoimet välit $]t_{j-1}, t_j[$ ovat erillisiä, joten polun γ polkuintegraali yli välin $[0,1]$ on enintään integraali yli näiden avoimien välien yhdisteen. Reaaliakselin välien reuna on nollamittainen, joten integraalin arvo yli avoimen välin on sama kuin integroitaessa yli suljettujen välien, joten voimme hyödyntää äskeistä yhtälöketjua, ja saamme

$$\int_\gamma \frac{|ds|}{d(s,\partial D)} = \int_0^1 \frac{|dt|}{d(t)} \geq \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{|dt|}{d(t)} \geq \sum_{j=1}^m \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{m}} \log \frac{c_j}{c_{j-1}}$$
$$= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{m}} \sum_{j=1}^m \log \frac{c_j}{c_{j-1}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{m}} \log \prod_{j=1}^m \frac{c_j}{c_{j-1}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{m}} \log \frac{b}{a}.$$

Väite pätee kaikilla m, joten polullemme pätee

$$\int_\gamma \frac{|ds|}{d(s,\partial D)} \geq \log \frac{b}{a} = \log \frac{d(y,\partial D)}{d(x,\partial D)}.$$

Koska infimumin ottaminen säilyttää järjestyksen, niin ottamalla infimum yli integraalien saamme ensimmäisen väitteen. Arvion itseisarvot seuraavat metriikan ominaisuudesta (M2) sekä logaritmin ominaisuudesta

$$\log \frac{x}{y} = -\log \frac{y}{x}.$$

Epäyhtälön (2.7) *todistus.*

Huomataan aluksi, että kolmioepäyhtälön perusteella mielivaltaisella $\gamma \in \Gamma_{x,y}$ pätee

$$d(\gamma(t),\partial D) \leq d(\gamma(t),x) + d(x,\partial D) = d(\gamma(t),x) + a. \tag{2.11}$$

Ennen kuin käytämme tätä hyödyksi seuraavassa arvioketjussa huomataan vielä, että polkuetäisyys kahden polulla olevan pisteen $\gamma(0)$ ja $\gamma(t)$ välillä on vähintään näiden pisteiden euklidinen etäisyys eli

$$l(\gamma(\gamma(0),\gamma(t))) \geq d(\gamma(0),\gamma(t)) = d(x,\gamma(t)) = d(\gamma(t),x),$$

joten vaihtamalla etäisyyttä jonka suhteen integroimme polkuetäisyydestä euklidiseen saamme toisen arvion seuraavaan yhtälöketjuun.

$$\int_\gamma \frac{|ds|}{d(s,\partial D)} = \int_0^1 \frac{|dt|}{d(\gamma(t),\partial D)} \overset{(2.11)}{\geq} \int_0^1 \frac{|dt|}{d(\gamma(t),x)+a}$$
$$\geq \int_0^1 \frac{d(x,\gamma(t))}{d(\gamma(t),x)+a} = \int_{a+d(x,\gamma(0))}^{a+d(x,\gamma(1))} \frac{dx}{x}$$
$$= \log(a + d(x,y)) - \log(a+0)$$
$$= \log\left(\frac{a+d(x,y)}{a}\right) = \log\left(\frac{d(x,y)}{a} + 1\right).$$

Jälleen kerran äskeinen pätee mielivaltaiselle $\gamma \in \Gamma_{x,y}$, ja infimumin ottaminen säilyttää järjestyksen, joten väite (2.7) pätee.

Huomautus 2. *Metriikan ominaisuuden* (*M*2) *nojalla pisteiden x ja y paikkaa saa vaihtaa kaavoissa* (2.6) *ja* (2.7).

Huomautus 3. *Äskeiseen lauseen tulos antaisi meille myös erään tavan todistaa kvasihyperbolista metriikkaa koskeva ehto (M3).*

Määrittelen seuraavaksi apukuvauksen arviotulostemme merkintöjen yksinkertaistamiseksi. Olkoon siis $j_D\colon D \times D \to \mathbb{R}_+$,

$$j_D(x,y) = \frac{1}{2}\log\left[\left(\frac{d(x,y)}{d(x,\partial D)}+1\right)\left(\frac{d(x,y)}{d(y,\partial D)}+1\right)\right].$$

Lause 3. *Jos D on avaruuden $\mathbb{R}^n$ aito alue, niin kaikille $x, y \in D$ pätee $j_D(x,y) \le k_D(x,y)$.*

Todistus: Väite seuraa logaritmin ominaisuuksista sekä epäyhtälöstä (2.7):

$$\begin{aligned} j_D(x,y) &= \frac{1}{2}\log\left[\left(\frac{d(x,y)}{d(x,\partial D)}+1\right)\left(\frac{d(x,y)}{d(y,\partial D)}+1\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{d(x,y)}{d(x,\partial D)}+1\right)+\frac{1}{2}\log\left(\frac{d(x,y)}{d(y,\partial D)}+1\right) \\ &\overset{(2.7)}{\le} \frac{1}{2}k_D(x,y)+\frac{1}{2}k_D(x,y) = k_D(x,y). \end{aligned}$$

Kuvaukset j_D ja q_D ovat itse asiassa metriikoita, mutta sivuutan tämän todistuksen, sillä käytämme kuvauksia vain hyperbolisen metriikan arviointiin, emmekä niinkään etäisyyden mittaamiseen. Kuvausta j_D tosin käytetään joissain kvasikonformikuvausten arvoinneissa kvasihyperbolisen metriikan tapaan. Katso esimerkiksi [GeOs].

Määritelmä 2. *Avaruuden $\mathbb{R}^n$ aito alue D on* uniforminen alue*, mikäli on olemassa sellaiset reaaliset vakiot $a, b > 0$, että jokainen pistepari $x_1, x_2 \in D$ voidaan yhdistää paloittain C^1-polulla $\gamma\colon I \to D$, jolle pätee*

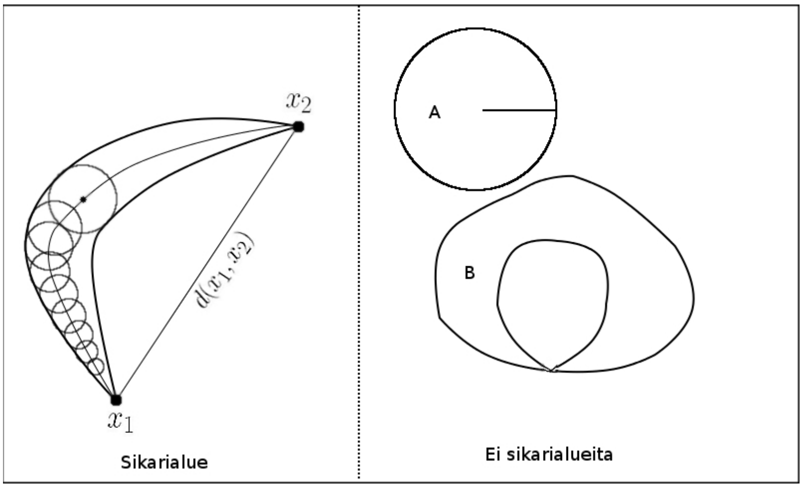
$$\begin{cases} l(\gamma) \le a d(x_1, x_2), \\ \min_{i=1,2} l(\gamma(x_i, x)) \le b d(x, \partial D) \text{ kaikilla } x \in \operatorname{Im}\gamma. \end{cases} \tag{2.12}$$

Huomautus 4. *Uniformisia alueita kutsutaan myös sikarialueiksi, ja käytämme tätä nimeä koko loppututkielman ajan kahdesta syystä. Ensinnäkin nimi sikarialue juontuu uniformisten alueiden geometriasta ja on siten kuvaavampi kuin uniformisuus, ja toisekseen termiä uniforminen avaruus käytetään topologiassa, tästä löytyy esimerkiksi lähteestä* [Bo]*. Määritelmässä käytetään nimeä uniforminen alue, jotta lukijan tiedonhankinta helpottuisi.*

Pohditaan hetken aikaa Määritelmän 2 antamaa geometrista tietoa, jotta voimme piirtää sikarialueista havainnollistavan kuvan. Ensimmäinen ehto kertoo meille, että pisteiden 'polkuetäisyys' pitää olla samaa suuruusluokkaa kuin niiden euklidinen etäisyys. Esimerkiksi alhaalla olevan kuvan oikeanpuolisissa alueissa tämä ehto ei päde, sillä mielivaltaisen läheltä toisiaan löytyy pisteitä, joiden välillä on liian suuri 'rako'.

Toinen ehto kertoo meille, että sikarialue on keskeltä pulleampi kuin reunoilta. Kuvassa 3 on yritetty havainnollistaa tätä ideaa, sillä ehto kertoo meille, että pisteen ympärille voi piirtää aina sikarialueeseen sisältyvän kuulaympäristön, jonka säde on samaa suuruusluokkaa kuin pisteen polkuetäisyys lähempään päätepisteeseen.

*Sikari*alue on siis järkevä suomennos uniformiselle alueelle, tosin kroissantti- tai banaanialuekin voisi toimia. Tämän alustuksen jälkeen siirrymme sikarialueiden ja kvasihyperbolisen metriikan yhteyksiin.



Kuva 3

Tarvitsemme seuraavan lauseen todistusta varten pienen apulauseen.

Lemma 2. *Olkoon $b > 0$. Tällöin*

$$b \log \left(\frac{b+1}{2b} \right) < 1.$$

Todistus: Pidetään tunnettuna, että kaikilla $x > 0$ pätee $\log x < x$. Tutkitaan nyt väitettä kahdessa eri tapauksessa.

Oletetaan ensin, että $b \leq 1$. Tällöin

$$b \log \left(\frac{b+1}{2b} \right) < b \left(\frac{b+1}{2b} \right) = \left(\frac{b+1}{2} \right) \leq \left(\frac{1+1}{2} \right) = 1.$$

Toisaalta, jos $b > 1$, niin

$$b \log \left(\frac{b+1}{2b} \right) = \log \left(\frac{b+1}{2b} \right)^b < \left(\frac{b+1}{2b} \right)^b = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2b} \right)^b < 1^b = 1.$$

Täten väite on tosi.

Lause 4. *Avaruuden $\mathbb{R}^n$ aito alue D on sikarialue, jos ja vain jos on olemassa reaaliset vakiot c ja d siten, että*

$$k_D(x,y) \leq c j_D(x,y) + d$$

kaikilla aidon alueen D pistepareilla x ja y. Tällöin voimme valita $c = 2b$ ja $d = 2(b + b\log a + 1)$, missä a ja b ovat sikarialueiden määritelmässä mainitut alueen D geometriaan liittyvät vakiot.

Todistus: Tulemme tässä tutkielmassa todistamaan vain toisen suunnan eli että jos D on sikarialue, niin löydämme yllä mainitut vakiot ja siten saamme arvioitua metriikkaa k_D ylöspäin. Toisen osan todistus löytyy artikkelista [GeOs].

Olkoon γ Määritelmässä 2 annettu polku. Valitaan $x_0 \in \mathrm{Im}(\gamma)$, jolle pätee, että $l(\gamma(x_1, x_0)) = l(\gamma(x_2, x_0))$. Tämä on mahdollista, koska kuvaus $t \overset{g}{\mapsto} (l(\gamma(x_1, \gamma(t))) - l(\gamma(x_0, \gamma(t)))$ on jatkuva kuvaus kompaktilta joukolta reaaliluvuille, ja saavuttaa siten kaikki arvonsa arvojen $g(0) > 0$ ja $g(1) < 0$ välistä, eli erityisesti arvon nolla.

Todistetaan ensin, että

$$k_D(x_j, x_0) \leq b\log\left(\frac{d(x_1, x_2)}{d(x_j, \partial D)} + 1\right) + b(1 + \log a) + 1, \qquad (2.13)$$

kun $j = 1, 2$. Apuväitteemme on symmetrinen pisteiden x_1 ja x_2 suhteen, joten todistetaan tapaus $j = 1$.

Tutkitaan kahdessa eri tapauksessa.

1° Oletetaan ensin, että

$$l(\gamma(x_1, x_0)) \leq \frac{b}{b+1} d(x_1, \partial D). \qquad (2.14)$$

Aluksi erikoisen tuntuinen oletus havaitaan pian hyödylliseksi. Valitaan $x \in \gamma(x_1, x_0)$. Tällöin soveltamalla ensin kolmioepäyhtälöä ja sitten tietoa siitä, että kahden pisteen välisen polun pituus on vähintään niiden euklidinen etäisyys, saamme

$$d(x_1, \partial D) \leq d(x_1, x) + d(x, \partial D) \leq l(\gamma(x_1, x)) + d(x, \partial D).$$

Tästä puolittain vähentämällä $l(\gamma(x_1, x))$ saadaan

$$d(x_1, \partial D) - l(\gamma(x_1, x)) \leq d(x, \partial D).$$

Nyt käyttämällä oletusta huomaamme, että

$$d(x_1, \partial D) - l(\gamma(x_1, x)) \geq d(x_1, \partial D) - \frac{b}{b+1} d(x_1, \partial D)$$
$$= \left(1 - \frac{b}{b+1}\right) d(x_1, \partial D) = \frac{1}{b+1} d(x_1, \partial D).$$

Yhdistämällä kaksi viimeistä arvioketjua saamme

$$d(x, \partial D) \geq \frac{1}{b+1} d(x_1, \partial D) \text{ kaikilla } x \in \gamma(x_1, x_0). \qquad (2.15)$$

Täten hyödyntämällä tätä epäyhtälöä sekä oletusta saamme

$$k_D(x_1,x_0) \le \int_{\gamma(x_1,x_0)} \frac{|ds|}{d(s,\partial D)} \overset{(2.15)}{\le} \int_{\gamma(x_1,x_0)} \frac{|ds|}{\frac{1}{b+1}d(x_1,\partial D)}$$
$$= (b+1)\frac{1}{d(x_1,\partial D)}\int_{\gamma(x_1,x_0)} 1|ds| = (b+1)\frac{1}{d(x_1,\partial D)} l(\gamma(x_1,x_0))$$
$$\overset{(2.14)}{\le} (b+1)\frac{1}{d(x_1,\partial D)}\frac{b}{b+1}d(x_1,\partial D) = b$$

eli

$$k(x_1,x_0) \le b. \tag{2.16}$$

Sikarialueiden määritelmässä arvioista (2.12) seuraa, että on oltava $a \ge 1$, sillä kahden pisteen välisen polun pituus on välttämättä vähintään pisteiden euklidinen etäisyys. Täten erityisesti $\log a \ge 0$, joten $1 + \log a \ge 1$. Myöskin

$$\frac{d(x_1,x_2)}{d(x_1,x_0)} \ge 0 \text{ eli erityisesti } \log\left(\frac{d(x_1,x_2)}{d(x_1,x_0)} + 1\right) \ge 0. \tag{2.17}$$

Yhdistämällä tulokset (2.16) ja (2.17) saamme viimein

$$k(x_1,x_0) \le b = b\cdot 0 + b \cdot 1 \le b\log\left(\frac{d(x_1,x_2)}{d(x_1,x_0)} + 1\right) + b(1+\log a)$$
$$\le b\log\left(\frac{d(x_1,x_2)}{d(x_1,x_0)} + 1\right) + b(1+\log a) + 1,$$

eli epäyhtälön (2.13).

2° Oletetaan seuraavaksi, että (2.14) ei päde. Valitaan nyt $y_1 \in \operatorname{Im}\gamma(x_1,x_0)$ siten, että

$$l(\gamma(x_1,y_1)) = \frac{b}{b+1}d(x_1,\partial D). \tag{2.18}$$

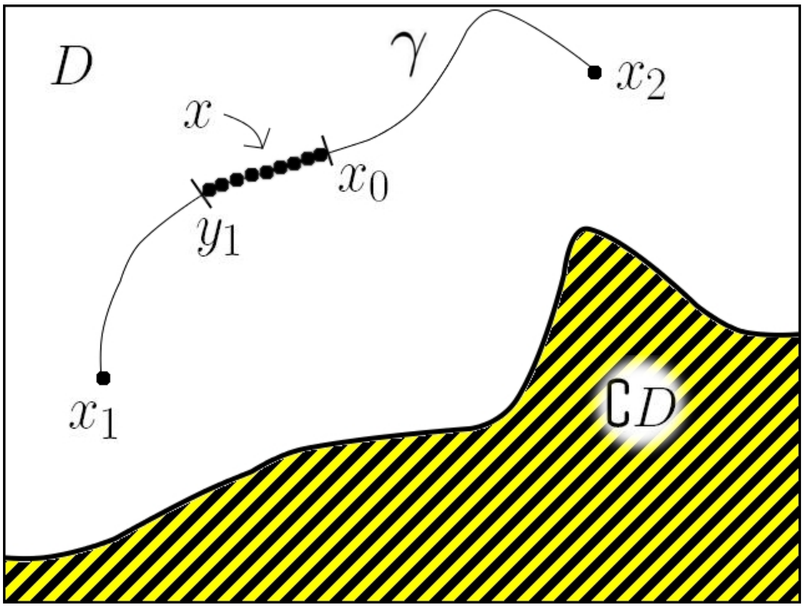
Valinta on mahdollinen, koska oletimme että

$$l(\gamma(x_1,x_0)) > \frac{b}{b+1}d(x_1,\partial D),$$

ja kuvaus $t \overset{g}{\mapsto} l(\gamma(x_1,\gamma(t)))$ on jatkuva kuvaus kompaktilta joukolta reaaliluvuille, ja saa siten kaikki arvonsa lukujen $g(0) = l(\gamma(x_1,x_0))$ ja $g(1) = 0$ välistä.

Olkoon nyt $x \in \operatorname{Im}\gamma(y_1,x_0)$. Kuva 4 havainnollistaa tilannetta. Pisteiden x_0 ja x_1 valinnan johdosta voimme käyttää sikarialueen ensimmäistä ominaisuutta:

$$l(\gamma(x_1,x)) \le bd(x,\partial D), \text{ joten } \frac{1}{b}l(\gamma(x_1,x)) \le d(x,\partial D). \tag{2.19}$$



Kuva 4

Merkitään $\beta = \gamma_{(y_1,x_0)}$. Sovelletaan seuraavassa Lemman 2 tulosta. Käyttämällä saamaamme arviota polun β pisteiden etäisyydestä joukon D reunasta sekä oletusta (2.18), saamme pisteiden x_0 ja y_1 valinnat mielessä pitäen, että

$$
\begin{aligned}
k_D(y_1,x_0) &= \inf_{\gamma_0\in\Gamma_{y_1,x_0}} \int_{\gamma_0} \frac{|ds|}{d(s,\partial D)} \le \int_\beta \frac{|ds|}{d(s,\partial D)} \\
&\overset{(2.19)}{\le} b\int_\beta \frac{|ds|}{l(\gamma(x_1,s))} = b\int_0^1 \frac{|ds|}{l(\gamma(x_1,\beta(t)))} = b\int_{l(\gamma(x_1,\beta(0))}^{l(\gamma(x_1,\beta(1))} \frac{dx}{x} \\
&= b\log(l(\gamma(x_1,x_0))) - b\log(l(\gamma(x_1,y_1))) = b\log\left(\frac{l(\gamma(x_1,x_0))}{l(\gamma(x_1,y_1))}\right) \\
&\overset{(2.18)}{=} b\log\left(\frac{b+1}{b}\frac{l(\gamma(x_1,x_0))}{d(x_1\partial D)}\right) = b\log\left(\frac{b+1}{2b}\frac{l(\gamma(x_1,x_2))}{d(x_1\partial D)}\right) \\
&= b\log\left(\frac{l(\gamma(x_1,x_2))}{d(x_1\partial D)}\right) + \underbrace{b\log\left(\frac{b+1}{2b}\right)}_{<1} < b\log\left(\frac{l(\gamma(x_1,x_2))}{d(x_1\partial D)}\right) + 1 \\
&\overset{(2.12)}{\le} b\log\left(\frac{ad(x_1,x_2)}{d(x_1\partial D)}\right) + 1 < b\log a\left(\frac{d(x_1,x_2)}{d(x_1\partial D)} + 1\right) + 1.
\end{aligned}
$$

Nyt siis

$$
k_D(y_1,x_0) \le b\log a\left(\frac{d(x_1,x_2)}{d(x_1\partial D)} + 1\right) + 1,
$$

ja kohdan **1**$^\circ$ todistusta mukailemalla saadaan myöskin $k_D(x_1,y_1)\le b$. Käyttämällä kolmioepäyhtälöä saamme siis

$$k_D(x_1,x_0)\le k_D(x_1,y_1)+k_D(y_1,x_0)\le b\log a\left(\frac{d(x_1,x_2)}{d(x_1\partial D)}+1\right)+1+b$$
$$\le b\log\left(\frac{d(x_1,x_2)}{d(x_1,x_0)}+1\right)+b(1+\log a)+1,$$

sillä $\log a\ge 0$. Väite siis pätee.

Olemme siis todistaneet, että arvio (2.13) pätee kun $j=1$. Koska tapaus $j=2$ on todistuksen suhteen täysin symmetrisessä asemassa, seuraa väite (2.13) kokonaisuudessaan. Nyt saamme viimein tämän arvion sekä kolmioepäyhtälön avulla, että

$$\begin{aligned}
&k_D(x_1,x_2)\le k_D(x_1,x_0)+k_D(x_2,x_0)\\
&\overset{(2.13)}{\le} b\log\left(\frac{d(x_1,x_2)}{d(x_1,\partial D)}+1\right)+b(1+\log a)+1+\\
&b\log\left(\frac{d(x_1,x_2)}{d(x_2,\partial D)}+1\right)+b(1+\log a)+1\\
&=b\left(\log\left(\frac{d(x_1,x_2)}{d(x_1,\partial D)}+1\right)+\log\left(\frac{d(x_1,x_2)}{d(x_1,\partial D)}+1\right)\right)\\
&+2(b+b\log a+1)\\
&=b\log\left[\left(\frac{d(x_1,x_2)}{d(x_1,\partial D)}+1\right)\left(\frac{d(x_1,x_2)}{d(x_1,\partial D)}+1\right)\right]\\
&+2(b+b\log a+1)\\
&=cj_D(x_1,x_2)+d,
\end{aligned}$$

kun valitaan $c=2b$ ja $d=2(b+b\log a+1)$.

Huomautus 5. *Matti Vuorinen on todistanut, että sikarialueiden karakterisoinnissa kvasihyperbolisen metriikan avulla voidaan valita $d=0$. Joissain lähteissä sikarialue määritellään aidoksi alueeksi D, jonka jokaiselle pisteparille x,y pätee arvio $k_D(x,y)\le c_D j_D(x,y)$ jollakin joukosta D riippuvalla vakiolla c_D. Vuorinen todistaa väitteen määrittelemällä niin kutsutun φ-uniformisen alueen,* [Vuo85].

3. Loppusanat

Tässä tutkielmassa on todistettu kvasihyperbolisen metriikan tärkeimmän perusominaisuudet ja paljon kiinnostavia tuloksia on jätetty esittämättä. Kuitenkin tämän tutkielman tulokset ovat tarpeellisia niille, jotka ovat kiinnostuneita kvasikonformisten tai kvasisäännöllisten kuvauksien teoriasta.

Tutkielmassa todistetut lauseet eivät täysin karakterisoi kuvausta k_D. Artikkelista [GeOs, s.60] löytyy nimittäin todistus sille, että jos ρ_D on jatkuva kuvaus aidolta alueelta D reaaliluvuille, jota kohti on olemassa vakio $m \in \mathbb{R}_+$ siten, että

$$m^{-1} d(x, \partial D)^{-1} \leq \rho_D \leq m d(x, \partial D)^{-1},$$

niin kuvaus $K_D \colon D \times D \to \mathbb{R}_+$,

$$K_D(x, y) = \inf_{\gamma \in \Gamma_{x,y}} \int_\gamma \rho_D(t) |dt|$$

toteuttaa muunmuassa kaikki tässä tutkielmassa todistetut tulokset.

Tarkempaa tietoa sikarialueista löytyy esimerkiksi lähteestä [GeOs], kvasikonformisesti homogeenisia alueita ja niiden tutkimusta kvasihyperbolisen metriikan avulla löytyy artikkelista [GePa]. Kvasisäännöllisiä kuvauksia ja konformigeometriaa löytyy esimerkiksi lähteestä [Vuo88].

Viitteet

[Bo] Nicolas Bourbaki. General Topology (Topologie Générale), Ch 1-4 MASSON, Paris, 1971.

[GeOs] F.W. Gehring ja B.G. Osgood. Uniform domains and the quasi-hyperbolic metric, J. Analyse Math. 36 (1979), 50-74.

[GePa] F.W. Gehring ja B.P. Palka. Quasiconformally homogenous domains, J. Analyse Math. 30 (1976), 172-199.

[Lehto] Lehto, Olli. Funktioteoria I-II, Limes ry, Helsinki, 1985.

[Mil] Milnor, J. Hyperbolic geometry - the first 150 years, Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982), 9-24.

[Vuo85] Vuorinen, Matti. Conformal invariants and quasiregular mappings, J. Anal. Math. 45 (1985), 69-115.

[Vuo88] Vuorinen, Matti. Conformal Geometry and Quasiregular Mappings, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1988.