

## 13. HEIKKO SUPPENEMINEN

Tässä kappaleessa perehdytään niinkutsuttuun *heikkoon suppenemiseen*, joka indusoi avaruuteen *heikon topologian*.

Heikon topologian syvempi tutkiminen kannattaa, mutta erityisen hyödyllistä siinä vaiheessa olisi tuntea hieman laajemmin yleistä topologiaa. Erityisesti kuvausperheen indusoima topologia on kriittinen käsite, kuten on myös näppituntuma siitä, millainen voi olla ei-metristytvä topologia.

Palautetaan mieliin vektorien suppeneminen, funktionaalien vahva suppeneminen ja määritellään lopuksi heikko suppeneminen.

**Määritelmä 13.1.** Olkoon  $V$  normiavaruus ja  $V'$  sen duaali.

- (1) Avaruuden  $V$  jono  $(v_n)$  *suppenee (normin suhteen) kohti vektoria*  $v_0 \in V$ , merkitään  $v_n \rightarrow v$ , jos  $\|v_n - v_0\| \rightarrow 0$ .
- (2) Avaruuden  $V'$  jono  $(v'_n)$  *suppenee pisteittäin kohti funktionaalia*  $v'_0 \in V'$ , jos  $v'_n(v) \rightarrow v'_0(v)$  kaikilla  $v \in V$ .

Tähän listaan voidaan lisätä nyt heikko suppeneminen.

**Määritelmä 13.2.** Olkoon  $V$  normiavaruus ja  $V'$  sen duaali.

- (1) Avaruuden  $V$  jono  $(v_n)$  *suppenee heikosti kohti vektoria*  $v_0 \in V$ , jos  $v'(v_n) \rightarrow v'(v_0)$  kaikilla  $v' \in V'$ .

Heikkoa suppenemista merkitään yleensä  $v_n \rightharpoonup v_0$ . ( $\text{\LaTeX}$ :ssa `\rightharpoonup`.)

**Tehtävä 13.1.** Osoita, että äärellisulotteisessa tilanteessa heikko suppeneminen on sama kuin normin suhteen suppeneminen.

**Tehtävä 13.2.** Osoita, että jos Banachin avaruuden jono  $(v_n)$  suppenee heikosti kohti vektoria  $v_0$ , niin  $v_0 \in \overline{\langle \{v_n | n \in \mathbb{N}\} \rangle}$ .

*Esimerkki 13.3.* Huomaa, että avaruudessa  $L^p$ ,  $p \neq 1, \infty$ , jono  $f_n$  suppenee heikosti jos ja vain jos

$$\int f_n g \rightarrow \int f_0 g$$

kaikilla  $g \in L^q$ .

**Tehtävä 13.3.** Jos jono  $(v_n)$  suppenee kohti vektoria  $v_0$ , niin se suppenee heikosti kohti vektoria  $v_0$ .

**Tehtävä 13.4.** Osoita, että jos jono  $(v_n)$  suppenee heikosti kohti vektoria  $v_0$ , niin  $\|v_0\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|v_k\|$ .

**Tehtävä 13.5.** Olkoon  $(v^n)_{n=1}^\infty$  jono avaruudessa  $\ell^p$ ,  $p > 1$ , s.e.

$$v_k^n = \begin{cases} 1, & \text{kun } n = k, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Osoita, että tämä jono suppenee heikosti, mutta ei normin suhteen, kohti nollajonoa. Tässä tehtävässä saa käyttää tietoa, että  $(L^p)' = L^q$ , missä  $p^{-1} + q^{-1} = 1$ .

*Esimerkki 13.4.* Avaruudella  $\ell^1$  on *Schurin ominaisuus*, eli heikko ja vahva suppeneminen ovat sama asia.

**Tehtävä 13.6.** Todista, että jos jono  $(v_n)$  suppenee heikosti kohti sekä vektoria  $w_1$  että vektoria  $w_2$ , niin  $w_1 = w_2$ . (Toisinsanoen, heikon suppenemisen raja-arvot ovat yksikäsitteisiä.)

(Vihje: Hahn-Banachin lause.)

**Tehtävä 13.7.** Olkoot  $V$  ja  $W$  Banachin avaruuksia ja  $T: V \rightarrow W$  rajoitettu operaattori. Osoita, että jos  $(v_n)$  on heikosti suppeneva jono avaruudessa  $V$ , niin  $T(v_n)$  muodostaa heikosti suppenevan jonon avaruudessa  $W$ .

**Määritelmä 13.5.** Normiavaruuden  $V$  *heikko topologia* on se topologia, jonka määrää heikko suppeneminen. Tämä voidaan ilmaista monella eri tavalla:

- Määritellään, että joukko on suljettu jos se sisältää heikosti suppenevien jonojensa raja-arvot, ja sanotaan että joukko on avoin jos sen komplementti on suljettu.
- Heikko topologia on kuvausperheen  $V'$  indusoima topologia.
- Heikko topologia on karkein topologia, jonka suhteen jokainen kuvaus  $f \in V'$  on jatkuva.

Ylläolevaa topologista määritelmää ei tarvitse sisäistää, mutta kannattaa pitää mielessä että heikon topologian enempi tutkiminen vie nopeasti yleisemmän topologian vesille.

**Määritelmä 13.6.** Normiavaruus  $V$  on *refleksiivinen*, mikäli kanoninen upotus

$$\iota: V \rightarrow V'', \quad (\iota(v))(f) = f(v)$$

on isometria.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Tässä oli aikaisemmin määriteltynä virhe, sillä väitettiin että refleksiivisyyteen riittää olla isometrinen biduaalinsa kanssa *jonkin* isometrian suhteen. Tämä ei ole totta, refleksiivisyyden määritelmä on ylläoleva asia, eivätkä eri määritelmät ole yhtäpitäviä. Kts. esim. Jamesin avaruus [https://en.wikipedia.org/wiki/James%27\\_space](https://en.wikipedia.org/wiki/James%27_space)

**Tehtävä 13.8.** Osoita, että Banachin avaruus on refleksiivinen jos ja vain jos sen duaali on refleksiivinen.

**Lause 13.7.** *Olkoon  $V$  refleksiivinen Banachin avaruus. Tällöin jokaisella rajoitetulla jonolla on heikosti suppeneva osajono.*

*Todistus.* Todistetaan seuraavissa tehtävissä 13.9–13.13, ensin tilanteessa missä  $V$  on separoituva. Yleinen tapaus tehdään luennolla, perustuu siihen että annetulla jonolla  $(v_n)$  aliavaruus  $\overline{\{v_n | n \in \mathbb{N}\}}$  on suljettu separoituva refleksiivinen aliavaruus.  $\square$

**Tehtävä 13.9.** Lauseen 13.7 tilanteessa, osoita että jos  $V$  on separoituva, niin niin on myös  $V''$ .

(Vihje: refleksiivisyys ja Lause 4.12.)

**Tehtävä 13.10.** Äskeisen tehtävän tilanteessa, valitse tiheä numeroituva kokoelma  $L_k \in V'$  ja osoita, että jokaisella rajoitetulla jonolla  $(v_n)$  avaruudessa  $V$  on osajono  $(w_i)$  s.e.  $(L_k(w_i))_{i=1}^\infty$  suppenee kaikilla  $i$ .

(Vihje: diagonaaliargumentti.)

**Tehtävä 13.11.** Äskeisen tehtävän tilanteessa, osoita että  $(L(w_i))$  suppenee kaikilla  $L \in V'$ .

(Vihje: approksimoi funktionaalia  $L$  tiheän joukon muodostavilla funktionaaleilla  $L_k$ .)

**Tehtävä 13.12.** Äskeisen tehtävän tilanteessa, osoita että kuvaus

$$T: V' \rightarrow \mathbb{K}, \quad T(L) = \lim_{k \rightarrow \infty} L(w_k)$$

on rajoitettu lineaarikuvaus, eli  $T \in V''$ .

**Tehtävä 13.13.** Äskeisen tehtävän tilanteessa, osoita että jono  $(w_k)$  suppenee heikosti vektoriin  $\iota^{-1}(T) \in V$ , missä  $\iota: V \rightarrow V''$  on kانونinen upotus refleksiivisyyden määritelmästä ja  $T$  edellisen tehtävän funktionaali.

**Korollari 13.8.** *Olkoon  $V$  refleksiivinen Banachin avaruus. Tällöin sen duaalin suljettu yksikkökuula on heikosti kompakti, eli jokaisella sen jonolla on suppeneva osajono. (Vaihtoehtoisesti, kyseinen joukko on kompakti avaruuden heikossa topologiassa.)*

**Tehtävä 13.14.** Todista Korollari 13.8.

**Tehtävä 13.15.** Osoita, että refleksiivisen Banachin avaruuden heikko suppeneminen ei ole minkään normin indusoima.

**Tehtävä 13.16.** Osoita, että Banachin avaruuden kompakti osajoukko on aina heikosti kompakti.

**13.1. Pari huomiota heikosta suppenemisestä Hilbertin avaruuksissa.**

**Tehtävä 13.17.** Osoita, että Hilbertin avaruuden yksikkökuula on aina heikosti kompakti.

**Lemma 13.9.** *Olkoon  $H$  Hilbertin avaruus ja  $(v_n)$  jono. Tällöin  $v_n \rightharpoonup v_0$  jos ja vain jos  $\langle v_n, w \rangle \rightarrow \langle v_0, w \rangle$  kaikilla  $w \in H$ .*

**Tehtävä 13.18.** Todista Lemma 13.9.  
(Vihje: Rieszin esityslause.)

**Lause 13.10.** *Olkoon  $H$  Hilbertin avaruus ja  $(v_n)$  jono, joka suppenee heikosti kohti vektoria  $v_0$ . Jos  $\|v_n\| \rightarrow \|v_0\|$ , niin jono suppenee myös normin suhteen.*

**Tehtävä 13.19.** Todista Lause 13.10.  
(Vihje: Tehtävä 9.9 ja Lemma 13.9.)

**Tehtävä 13.20.** Olkoon  $H$  Hilbertin avaruus ja  $\{v_n | v \in \mathbb{N}\}$  sen ortonormaali systeemi. Osoita, että jono  $(v_n)$  suppenee heikosti.  
(Vihje: Besselin epäyhtälö.)

**13.2. Heikolla suppenemisella kikkailusta.** Seuraavassa käydään läpi esimerkkiä eräänlaisesta minimointiongelmasta, jossa refleksiivisen avaruuden yksikkökuulan heikkoa kompaktisuutta päästään käyttämään hyödyksi.

*Esimerkki 13.11.* Tutkitaan minimointiongelmaa avaruudessa  $L^2([0, 1], \mathbb{R})$ . Halutaan, syystä tai toisesta, osoittaa että on olemassa  $L^2$ -normiltaan minimaalinen funktio  $f \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ , jolle pätee

$$\int_0^1 f(t) \cos(2\pi t) dt \geq \pi.$$

Funktioita, joilla ylläoleva ehto pätee on selvästi olemassa, (esim.  $1000 \cdot \chi_{[0, \pi/2]}$ ) joten ongelmana on näyttää että näistä löytyy minimaalinen.

Äkkiseltään ongelma vaikuttaa hankalalta, sillä vaikka voimme löytää kaikilla  $\varepsilon > 0$  funktion  $f_\varepsilon$  jonka normi on alle epsilonin päästä minimistä

$$M := \inf \left\{ \|f\|_2 : \int_0^1 f(t) \cos(2\pi t) dt \geq \pi \right\},$$

emme tiedä suppeneeko näin muodostettu jono. Tehdään se seuraavissa tehtävissä.

**Tehtävä 13.21.** Esimerkin 13.11 tilanteessa, muodosta jono  $f_n \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$  s.e.  $\|f_n\|_2 \in [M, M + 1/n]$  kaikilla  $n \in \mathbb{N}$ .

**Tehtävä 13.22.** Esimerkin 13.11 tilanteessa, osoita että äsken muodostamasi jono sisältää osajonon joka suppenee heikosti kohti jotakin  $f \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ .

**Tehtävä 13.23.** Esimerkin 13.11 tilanteessa, osoita että äsken muodostamasi osajono suppenee normin mielessä kohti heikkoa raja-arvoaan.  
(Vihje: Lause 13.10.)

**13.3. Lisää heikkoja ominaisuuksia.** Lähes jokaisesta topologisesta ominaisuudesta voidaan muodostaa heikko versio. Helpoin tapa on vain sanoa, että avaruudella tai kuvauksella on ominaisuus  $P$ , mikäli tämä ominaisuus on voimassa kun avaruus varustetaan heikolla topologialla. (Esimerkiksi heikko kompaktisuus.) Vastaavasti voitaisiin määritellä myös heikko rajoittuneisuus tai heikko separoituvuus.

On kuitenkin ominaisuuksia, jotka eivät ole puhtaasti topologisia, kuten täydellisyys, jolloin heikon ominaisuuden määrittely vaatii hie-  
man käsityötä.

**Määritelmä 13.12.** Olkoon  $V$  normiavaruus ja  $(v_n)$  jono. Sanomme, että jono  $(v_n)$  on *heikko Cauchyn jono*, mikäli skalaarijono  $(v'(v_n))$  on Cauchyn jono kaikilla  $v' \in V$ .

Normiavaruus on *heikosti täydellinen*, mikäli jokainen heikko Cauchyn jono suppenee heikosti.

**Lause 13.13.** *Jokainen refleksiivinen avaruus on heikosti täydellinen.*

**Tehtävä 13.24.** Todista edellinen lause.

(Vihje: osoita ensin, että heikosti Cauchyn jono on rajoitettu, käytä sitten suljetun kuulan heikkoa kompaktisuutta.)