

MATS220 – FUNKTIONAALIANALYYSI – KEVÄT 2020

RAMI LUISTO

Tämä on kurssin MATA220 – Funktionaalianalyysi kurssimoniste. Kurssi luennoidaan tehtäväpainotteisesti; erityisesti monisteesta on noin 80% tehtäviä, 10% määritelmiä sekä väitteitä ja 5% huomautuksia. Tekemällä kaikki tehtävät pitäisi Funktionaalianalyysin perusteiden avautua.

Tämä moniste nojaa useampiin eri lähteisiin, erityisen hyödyllistä lukemistoa materiaalia laadittaessa ovat olleet Jouni Parkkosen Funktionaalianalyysin luentomonisteet vuosilta 2017 ja 2018.

Kurssin kotisivu löytyy osoitteesta <https://luisto.fi/MATS220>.

13. huhtikuuta 2020

SISÄLTÖ

Johdanto	4
1. Vektoriavaruudet	6
1.1. Lineaarikuvaukset	8
2. Normiavaruudet	11
2.1. Normiavaruuden metriikka	12
2.2. Rajoitetut lineaarikuvaukset	14
3. Kannat ja Banachin avaruudet	17
3.1. Kannat	17
3.2. Täydellisyys	20
3.3. Separoituvuus	21
3.4. Banachin avaruudet	23
3.5. Lisähuomioita	26
4. Hahnin ja Banachin lause	29
4.1. Sublineaariset kuvaukset	29
4.2. Hahn-Banach -lauseen todistus	30
4.3. Suljetut aliavaruudet	32
5. L^p -avaruudet	35
5.1. Tekijäavaruudet	35
5.2. L^p -avaruudet	36
5.3. L^p -avaruuksien täydellisyys	38
5.4. Esimerkkejä L^p -kuvauksista	39
5.5. L^p -avaruuksien duaalit	39
6. Isoja lauseita	42
6.1. Avoimen kuvauksen lause	44
6.2. Suljetun kuvaajan lause	45
6.3. Kiinnostavia seurauksia aiemmille lauseille	46
7. L^p avaruudet osa 2 – the electric boogaloo	47
7.1. Toivottuja esimerkkejä	47
7.2. Lisää L^p -avaruuksista	47
7.3. ℓ^p -avaruuksista	48
7.4. Biduaali ja refleksiiviset avaruudet	50
7.5. Muita juttuja	50
Harjoitustentti ensimmäiseen välikokeeseen	52
8. Hilbertin avaruudet	53
8.1. Sisätulo	53
8.2. Täydelliset sisätuloavaruudet	54
8.3. Kohtisuoruus sisätuloavaruudessa	55
9. Hilbertin avaruuksia 2	58
9.1. Lähimmän pisteen kuvaus	59
9.2. Sisätuloisomorfismeista ja upotuksista	60
10. Rieszin esityslause	63
10.1. Ortoprojektiot	63
10.2. Rieszin esityslause	65

10.3. Cybenkon lause	66
11. Fourier ja ortonormaalit joukot	70
11.1. Ortosysteemit	71
11.2. Fourier-muunnos	73
11.3. Separoituvat Hilbertin avaruudet	74
12. Spektreistä ja spektraaliteoriasta	78
12.1. Kompakteista operaattoreista	80
12.2. Kompaktien operaattorien spektreistä	82
13. Heikko suppeneminen	83
13.1. Pari huomiota heikosta suppenemisestä Hilbertin avaruuksissa	85
13.2. Heikolla suppenemisella kikkailusta	86
13.3. Lisää heikkoja ominaisuuksia	87
Liite A. Merkintöjä yms.	88
A.1. Kuvausterminologiaa	88
A.2. Kuvausjoukkoja	88
A.3. Jonoavaruuksia	89
A.4. Normeja sekä seminormeja	89
Liite B. Algebran ja metrisen topologian määritelmiä	89
B.1. Algebraa	89
B.2. Metrisiä käsitteitä	89
Liite C. Hieman joukko-oppia	90
Liite D. Stonen ja Weierstrassin lause	91
Viitteet	92

JOHDANTO

Funktionaalianalyysi on laaja matematiikan ala, jossa yhdistyy (mm.) lineaarialgebra, analyysi ja topologia. Hyvin tiivistettynä voisi sanoa, että kurssilla määritellään Banachin ja Hilbertin avaruudet sekä käydään läpi näiden perusominaisuuksia. Kuvailevampaa on kuitenkin sanoa, että kurssilla siirrytään tutkimaan funktioiden muodostamien joukkojen ominaisuuksia ja näiden funktiojoukkojen välisiä kuvauksia. Esimerkiksi funktion derivaatan voi tulkita lineaarikuvauksena jatkuvasti derivoituvien funktioiden joukosta jatkuvien funktioiden joukolle. Funktioanalyysi antaakin loistavan kontekstin monille analyysin käsitteille; yllämainitun derivaatan lisäksi esimerkiksi kurssilla määriteltävät Fourier- ja Laplace-muunnokset ovat lineaarikuvauksia eräiden funktioavaruuksien välillä. (Lineaarikuvaukset nousevat kurssilla usein esille, funktionaalianalyysiä kutsutaankin joskus 'ääretönulotteiseksi lineaarialgebraksi' ja lineaarialgebraa vastaavasti 'äärellisulotteiseksi funktionaalianalyysiksi'.)

Edelleen monet integraali- tai (osittais)differentiaaliyhtälöt taipuvat funktionaalianalyysin silmissä kysymyksiksi lineaaristen yhtälöiden ratkeavuudesta, ja erityisesti kysymyksiksi lineaarikuvauksien kääntyvyydestä ja ominaisarvoista. Alustavana esimerkkinä, oletetaan että sinulle annetaan seuraavanlainen tehtävä:

Olkoon $K: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $K(x, y) = \frac{xy}{e^x e^y}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
ja oletetaan, että $f(x) = \lambda \int_{\mathbb{R}} K(x, y) f(y) dy$ kaikilla x .
Ratkaise f .

Nyt huomataan, että annetulla $K(x, y)$, millä tahansa¹ $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ja $a \in \mathbb{R}$ pätee

$$\int_{\mathbb{R}} K(x, y)(ag(y) + h(y)) dy = a \int_{\mathbb{R}} K(x, y)g(y) dy + \int_{\mathbb{R}} K(x, y)h(y) dy.$$

Täten siis jos merkitään $T(f) = \int_{\mathbb{R}} K(\cdot, y)f(y) dy$, niin $T(ag + h) = aT(g) + T(h)$. Tämä "T" vaikuttaa siis jossain määrin lineaariselta, mitä se ikinä tässä yhteydessä tarkoittaakaan. Erityisesti, alkuperäinen ongelma palaa siis muotoon " $T(f) = \lambda f$, ratkaise f ". Lineaarialgebrassa vastaava ongelma olisi muotoa " $L(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$, ratkaise $\mathbf{x}$ ", eli kyseessä olisi yksinkertaisesti kysymys lineaarikuvauksen ominaisarvoista. Täten koko alkuperäinen ongelma on ominaisarvokysymys, kunhan ensin saamme lineaaristen operaattorien teorian vakaalle pohjalle. Myöskin, Funktionaalianalyysissä ei puhuta ominaisarvojen etsimisestä vaan spektraaliteoriasta, mutta tästä lisää myöhemmin kurssin loppupuolella.

Funktionaalianalyysissä opitut tekniikat luovat luontevan kontekstin monien analyysin käsitteiden tutkimiseen, ja funktionaalianalyysin

¹Okei, millä tahansa sellaisella jolla annetut integraalit on määriteltyjä, tähän on luontevia joukkoja, mutta mennään niihin vasta myöhemmin.

osaaminen antaakin siten huomattavasti apua mm. Fourier-analyysin, (osittais)differentiaaliyhtälöiden, integraaliteorian ja vastaavien alojen opiskeluun ja ymmärtämiseen. Edelleen funktionaalianalyysissä tulee luontevasti määriteltyä useita eri suppenemiskäsitteitä funktiojonolle (pisteittänen suppeneminen, tasainen suppeneminen, suppeneminen L^p -normin suhteen, heikko suppeneminen, heikko tähti -suppeneminen jne). Suppenemiskäsitteet liittyvät aina johonkin avaruuden topologiaan, eli kurssilla pääsee tutkimaan (ainakin epäsuorasti) useita eri topologioita, ja topologian kurssin 'abstrakti hölynpöly' pääsee tällä kursilla käyttämään tositarkoituksella. Tämän 'sovellushyödyllisyyden' lisäksi funktionaalianalyysi on myöskin itsessään huomattavan kaunis ja monisyinen matemaattinen teoria josta riittäisi opiskeltavaa ja tutkittavaa vuosikausiksi.

1. VEKTORIAVARUUDET

Monet asiat näyttävät aika samalta funktionaalianalyysissä ja lineaarialgebrassa, monet muut asiat taas eivät. Erityisen huomionarvoinen asia on, että ääretönulotteisia vektoriavaruuksia on huomattavasti enemmän ja niitä on myös huomattavan monta erilaista eri tyyppiä – vrt. äärellisulotteiset $\mathbb{R}$ -vektoriavaruudet joita on (oleellisesti) vain $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Määritelmä 1.1. Olkoon $\mathbb{K}$ kunta^a ja $V \neq \emptyset$ joukko joka on varustettu seuraavilla laskutoimituksilla:

$$\lambda: V \times V \rightarrow V$$

ja

$$\mu: \mathbb{K} \times V \rightarrow V.$$

Jatkossa merkitsemme aina $\lambda(v, w) = v + w$ ja $\mu(a, v) = av$. Kutsumme laskutoimitusta λ *yhteenlaskuksi* ja laskutoimitusta μ *skalaarilla kertomiseksi*.

Näillä laskutoimituksilla varustettuna V on $\mathbb{K}$ -vektoriavaruus mikäli seuraavat ehdot ovat voimassa kaikilla $x, y, z \in V$, $a, b \in \mathbb{K}$.

- (V1) $x + y = y + x$ kaikilla $x, y \in V$.
- (V2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ kaikilla $x, y, z \in V$.
- (V3) On olemassa $\mathbf{0} \in V$ jolle pätee $\mathbf{0} + x = x$ kaikilla $x \in V$.
- (V4) Kaikilla $x \in V$ on olemassa $y \in V$ jolle pätee $x + y = \mathbf{0}$; tällaista y merkitään $-x$.
- (V5) $a(x + y) = ax + ay$ kaikilla $a \in \mathbb{K}$ ja $x, y \in V$.
- (V6) $(a + b)x = ax + bx$ kaikilla $a, b \in \mathbb{K}$ ja $x \in V$.
- (V7) $a(bx) = (ab)x$ kaikilla $a, b \in \mathbb{K}$ ja $x \in V$.
- (V8) $1x = x$ kaikilla $x \in V$.

Joukon V alkioita kutsutaan *vektoreiksi* ja kunnan $\mathbb{K}$ alkioita *skalaareiksi*.

Huomaa, että joukko V varustettuna yhteenlaskulla muodostaa vaihdannaisen ryhmän. Merkitsemme ryhmän $(V, +)$ neutraalialkiota $\mathbf{0}_V$, tai 0 mikäli erehdyksen vaaraa ei ole, ja kunnan $\mathbb{K}$ additiivista neutraalialkiota 0 sekä multiplikatiivista neutraalialkiota 1 .

^aTällä kurssilla aina joko $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Tehtävä 1.1. Näytä, että reaalikertoisten polynomifunktioiden $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avaruus on $\mathbb{R}$ -vektoriavaruus kun se varustetaan operaatioilla $p + q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(p + q)(x) = p(x) + q(x)$ ja $ap: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(ap)(x) = a \cdot p(x)$.

Merkitään tätä kokoelmaa $P(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Yleisemmin, mikäli rajoitutaan tutkimaan vain välillä $I \subset \mathbb{R}$ määriteltyjä polynomeja, merkitään $P(I, \mathbb{R})$ tai $P(I)$ mikäli maalijoukko on selvä kontekstista.

Tehtävä 1.2. Näytä, että jatkuvien funktioiden $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ avaruus on $\mathbb{R}$ -vektoriavaruus kun se varustetaan samoilla operaatioilla kuin polynomifunktioiden avaruus.

Tätä jatkuvien funktioiden avaruutta merkitään $C([0, 1], \mathbb{R})$ tai $C^0([0, 1], \mathbb{R})$.

Huomautus 1.2. Huomaa, että edellä mainituilla joukoilla $P(\mathbb{R})$ ja $C(\mathbb{R})$ alkioiden pisteittäinen tulo on myös hyvinmääritelty, mutta sitä ei tulla käyttämään tai tarvitsemaan. Erityisesti kyseessä on poikkeustilanne; kts. Tehtävä 1.3

Tehtävä 1.3. Olkoon $V \subset C([0, 1], \mathbb{R})$ muotoa $x \mapsto a \sin(x)$ olevien funktioiden kokoelma, $a \in \mathbb{R}$. Osoita, että V on $\mathbb{R}$ -vektoriavaruus.

Tehtävä 1.4. Näytä, että kaikkien reaaliarvoisten suppenevien lukujonojen joukko on $\mathbb{R}$ -vektoriavaruus.

Tätä joukkoa merkitään usein $\ell_0(\mathbb{R})$.

Tehtävä 1.5. Näytä, että kaikkien reaaliarvoisten rajoitettujen lukujonojen joukko on $\mathbb{R}$ -vektoriavaruus.

Tätä joukkoa merkitään usein $\ell_\infty(\mathbb{R})$.

Tehtävä 1.6. Olkoon X mikä tahansa joukko. Osoita, että kaikkien kuvausten $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ joukko $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ on $\mathbb{K}$ -vektoriavaruus kun se varustetaan laskutoimituksilla $p + q: X \rightarrow \mathbb{K}$, $(p + q)(x) = p(x) + q(x)$ ja $ap: X \rightarrow \mathbb{K}$, $(ap)(x) = a \cdot p(x)$.

Määritelmä 1.3. Jos V on $\mathbb{K}$ -vektoriavaruus ja $W \subset V$, niin sanotaan että W on vektoriavaruuden V *vektorialiavaruus* mikäli W on myös $\mathbb{K}$ -vektoriavaruus (varustettuna samoilla laskutoimituksilla kuin V .)

Tehtävä 1.7. Osoita, että nollaa kohti suppenevien reaaliarvoisten lukujonojen joukko on harjoitustehtävässä 1.4 esiintyvän vektoriavaruuden vektorialiavaruus.

Tehtävä 1.8. Osoita, että jatkuvasti derivoituvien funktioiden avaruus $C^1([0, 1], \mathbb{R})$ on jatkuvien funktioiden $C([0, 1], \mathbb{R})$ aliavaruus.

Tehtävä 1.9. Osoita, että reaalikertoimisten enintään astetta n olevien polynomien avaruus $P^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on kaikkien polynomien avaruuden $P(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vektorialiavaruus.

Lause 1.4. $\mathbb{K}$ -vektoriavaruuden V osajoukko W on vektorialiavaruus jos ja vain jos seuraavat ehdot pätevät:

- (1) Jos $x, y \in W$, niin $x - y \in W$.
- (2) Jos $x \in W$ ja $a \in \mathbb{K}$, niin $ax \in W$.
- (3) $0_V \in W$.

Tehtävä 1.10. Todista Lause 1.4.

Tehtävä 1.11. Anna kolme esimerkkiä tilanteesta jossa osajoukko $W \subset V$ ei vektoriavaruuden V vektorialiavaruus mutta toteuttaa kaikki paitsi yhden lauseen 1.4.

Tehtävä 1.12. Olkoon S jokin indeksijoukko ja $\{V_i \mid i \in S\}$ kokoelma vektoriavaruuden W vektorialiavaruuksia. Osoita, että leikkaus $\cap_{i \in S} V_i$ on edellen avaruuden W vektorialiavaruus.

Tehtävä 1.13. osoita, että kahden aliavaruuden yhdiste ei välttämättä ole aliavaruus.

Tehtävä 1.14. Olkoon $C_{\text{int}}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ kaikkien niiden jatkuvien funktioiden $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ joukko, joilla $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ on äärellinen. Osoita, että tämä on vektoriavaruuden $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aliavaruus.

1.1. Lineaarikuvaukset.

Määritelmä 1.5. Olkoot V ja W kaksi $\mathbb{K}$ -vektoriavaruutta. Kuvaus $L: V \rightarrow W$ on $(\mathbb{K})$ -lineaarinen, mikäli

$$(L1) \quad L(v + w) = L(v) + L(w)$$

$$(L2) \quad L(av) = aL(v)$$

kaikilla $v, w \in V$ ja $a \in \mathbb{K}$.

Seuraavan Lemman saa pitää tunnettuna.

Lemma 1.6. Kuvaus L on lineaarinen jos ja vain jos

$$(L1') \quad L(v - w) = L(v) - L(w)$$

$$(L2) \quad L(av) = aL(v)$$

kaikilla $v, w \in V$ ja $a \in \mathbb{K}$.

Tehtävä 1.15. Näytä, että derivointi $D: C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $D(f) = f'$ on lineaarinen kuvaus.

Tehtävä 1.16. Näytä, että kuvaus $\mathcal{E}_0: \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{E}_0(f) = f(0)$ on lineaarikuvaus.

Tehtävä 1.17. Näytä, että kuvaus $I: C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow C([0, 1], \mathbb{R})$, $I(f) = F$, missä

$$F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

on lineaarikuvaus.

Tehtävä 1.18. Näytä, että kuvaus $C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_0^1 f(t) dt$, on lineaarikuvaus.

Tehtävä 1.19. Osoita, että tehtävässä 1.4 esiintyvässä suppenevien lukujonojen avaruudessa määritelty kuvaus joka vie suppenevan jonon sen raja-arvolle on lineaarikuvaus. (Ts. kuvaus $(x_n) \mapsto \lim_n x_n$ on lineaarikuvaus.)

Huomautus 1.7. Jos V on $\mathbb{K}$ -vektoriavaruus, niin $\mathbb{K}$ -lineaarikuvausta $V \rightarrow \mathbb{K}$ kutsutaan *funktionaaliksi*.² Esimerkiksi Tehtävien 1.16 ja 1.18 lineaarikuvaukset ovat funktionaaleja.

Tehtävä 1.20. Osoita, että on olemassa kuvaus joka toteuttaa ehdon (L2) muttei ehtoa (L1).

Huomautus 1.8. Tehtävän 1.20 “toinen suunta” on myös totta, eli on olemassa kuvaus joka toteuttaa ehdon (L1) muttei ehtoa (L2). Kyseisenlainen esimerkki on kuitenkin hieman hankala, ja tarvitsemme enemmän välineistöä sen rakentamiseen.

Tehtävä 1.21. Osoita, että lineaarikuvaukselle pätee aina $L(0) = 0$.

Tehtävä 1.22. Olkoot V ja W vektoriavaruuksia ja $L: V \rightarrow W$ lineaarikuvaus. Osoita, että jos $Y \subset W$ on vektoriavaruuden W vektorialiavaruus, niin sen alkukuva

$$L^{-1}(Y) = \{v \in V \mid L(v) \in Y\}$$

on vektoriavaruuden V vektorialiavaruus.

Tehtävä 1.23. Olkoot V ja W vektoriavaruuksia ja $L: V \rightarrow W$ lineaarikuvaus. Osoita, että jos $Z \subset V$ on vektoriavaruuden V vektorialiavaruus, niin sen kuva

$$L(Z) = \{L(v) \mid v \in Z\}$$

on vektoriavaruuden W vektorialiavaruus.

Määritelmä 1.9. Olkoot V ja W vektoriavaruuksia ja $L: V \rightarrow W$ lineaarikuvaus. Lineaarikuvauksen L *ydin* on joukko

$$\ker(L) := \{v \in V \mid L(v) = 0_W\}$$

ja sen *kuva* on joukko

$$\operatorname{Im}(L) := \{L(v) \mid v \in V\}.$$

Lause 1.10. *Lineaarikuvauksen kuva ja ydin ovat maali- ja lähtöavaruuksien aliavaruuksia.*

Tehtävä 1.24. Todista Lause 1.10.

Tehtävä 1.25. Todista, että lineaarikuvaus L on injektio jos ja vain jos $\ker(L) = \{0\}$.

Tehtävä 1.26. Olkoot V ja W kaksi $\mathbb{K}$ -vektoriavaruutta. Osoita, että kaikkien lineaarikuvausten $V \rightarrow W$ joukko $\mathcal{L}(V, W)$ on $\mathbb{K}$ -vektoriavaruus.

²Joiissain lähteissä määritelmä on hieman rajoittuneempi.

Tehtävä 1.27. Osoita, että nk. *vasen siirto*

$$\sigma: \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}), (\sigma(f))(n) = f(n+1)$$

on lineaarikuvaus.

(Muista, että $\mathcal{F}(X, Y)$ on kaikkien kuvausten $X \rightarrow Y$ kokoelma, erityisesti tässä $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ on kaikkien reaaliarvoisten funktioiden kokoelma. Kts. Tehtävä 1.6.)

Tehtävä 1.28. Määritä tehtävän 1.27 kuvauksen ydin.

Tehtävä 1.29. Määritä tehtävän 1.27 kuvauksen kuva.

Määritelmä 1.11. Lineaarikuvausta $L: V \rightarrow W$ vektoriavaruuksien välillä kutsutaan (*lineaariseksi*) *isomorfiksi* mikäli se on myös bijektio.

Tehtävä 1.30. Osoita, että kuvaus $D: C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $D(f) = f'$ ei ole lineaarinen isomorfismi.

Tehtävä 1.31. Olkoon $L: V \rightarrow W$ lineaarinen isomorfismi kahden vektoriavaruuden välillä. Osoita, että sen käänteiskuvaus $L^{-1}: W \rightarrow V$ on lineaarikuvaus.

2. NORMIAVARUUDET

Lineaarialgebran kurssilla määriteltiin useita eri normeja, mutta äärellisulotteisessa tilanteessa kaikki normit ovat ekvivalentteja (palataan tähän kohta). Ääretönulotteisessa tilanteessa vektoriavaruuksia on paljon enemmän erilaisia tyyppisiä, ja kussakin vektoriavaruudessa on usein paljon aidosti aivan erilaisia normeja.

Määritelmä 2.1. Olkoon V $\mathbb{K}$ -vektoriavaruus. *Normi* vektoriavaruudessa V on kuvaus $N: V \rightarrow [0, \infty)$ jolle pätee seuraavat ehdot.
 (N1) $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ kaikilla $x, y \in V$.
 (N2) $N(ax) = |a|N(x)$ kaikilla $x \in V$ ja $a \in \mathbb{K}$.
 (N3) $N(x) = 0$ jos ja vain jos $x = 0_V$.

Jatkossa merkitsemme yleensä $N(x) =: \|x\|$. Kuvausta N joka toteuttaa ehdot (N1) ja (N2) sekä ehdon $N(x) \geq 0$ kaikilla $x \in V$ kutsutaan *seminormiksi*.

Tehtävä 2.1. Osoita, että kuvaus $f \mapsto \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$ on normi $\mathbb{R}$ -vektoriavaruudessa $C([0, 1], \mathbb{R})$.

Tätä normia merkitään usein $\|\cdot\|_\infty$.

Tehtävä 2.2. Osoita, että kuvaus $f \mapsto \int_0^1 |f(t)| dt$ on normi $\mathbb{R}$ -vektoriavaruudessa $C([0, 1], \mathbb{R})$.

Tätä normia merkitään usein $\|\cdot\|_1$.

Tehtävä 2.3. Osoita, että kuvaus $f \mapsto |f(0)|$ on *seminormi* $\mathbb{R}$ -vektoriavaruudessa $C([0, 1], \mathbb{R})$.

Tehtävä 2.4. Osoita, että kuvaus

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mapsto \sum_{j=0}^n |a_j|$$

on normi kaikkien polynomien avaruudessa $P(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(Huomaa, että polynomien avaruudessa $P(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ei ole 'äärettömiä polynomeja', vaan että jokaisella polynomilla on vain äärellinen määrä termejä.)

Tehtävä 2.5. Olkoon

$$\ell^1(\mathbb{R}) = \{(x_n)_{n=0}^\infty \mid x_j \in \mathbb{R}, \sum_j |x_j| < \infty\}$$

kaikkien itseisesti suppenevien reaalilukujonojen vektoriavaruus. Osoita, että

$$\|(x_n)\|_1 := \sum_n |x_n|$$

on tämän avaruuden normi.

Tehtävä 2.6. Olkoon $C_{\text{int}}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ Tehtävässä 1.14 määritelty jatkuvien äärellisesti integroituvien funktioiden $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ muodostama vektoriavaruus. Osoita, että

$$\|f\|_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$$

on tämän avaruuden normi.

Tehtävä 2.7. Olkoon $(W, \|\cdot\|_W)$ normiavaruus ja V vektoriavaruus sekä $L: V \rightarrow W$ bijektiivinen lineaarikuvaus. Osoita, että

$$\|v\| := \|L(v)\|_W$$

määrittelee normin avaruuteen V .

Määritelmä 2.2. Olkoon V vektoriavaruus ja $\|\cdot\|_1$ sekä $\|\cdot\|_2$ sen kaksi normia. Sanomme, että nämä normit ovat *ekvivalentit* mikäli on olemassa vakio $K \geq 1$ siten, että

$$K^{-1}\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq K\|v\|_1$$

kaikilla $v \in V$.

Tehtävä 2.8. Osoita, että polynomiavaruuden $P^n([0, 1], \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$ normit $\|\cdot\|_\infty$ ja $\|\cdot\|_1$ ovat ekvivalentit.

(Vihje: huomaa että välillä $[0, 1]$ määritellyllä polynomilla $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ funktion suurin arvo sekä sen derivaatan suurin arvo ovat siinä määrin vertailtavissa, että $\|p'\|_\infty \leq C\|p\|_\infty$ missä C on vakio joka saattaa riippua polynomin asteesta n .)

Tehtävä 2.9. Osoita, että polynomiavaruuden $P([0, 1], \mathbb{R})$ normit $\|\cdot\|_\infty$ ja $\|\cdot\|_1$ eivät ole ekvivalentteja.

2.1. Normiavaruuden metriikka. Normin eräs tärkeimmistä ominaisuuksista on, että se antaa mahdollisuuden vertailla etäisyyksiä. Niille, jotka ovat käyneet kurssin “metriset avaruudet” tai vastaavan, voi lyhyesti sanoa että normi määrää ääretönulotteisessakin tilanteessa *metriikan*. Niiden, jotka eivät ole metriikoita opiskelleet, ei tarvitse huolestua, kurssilla esitellään ja käydään läpi ne tekniikat mitä tarvitaan; lähinnä metriikan, jonon suppenemisen, funktion jatkuvuuden, sulkeuman ja täydellisyyden käsitteet.

Määritelmä 2.3. Olkoon V vektoriavaruus ja $\|\cdot\|$ sen normi. Normin määräämä metriikka on funktio

$$d_{\|\cdot\|}: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_{\|\cdot\|}(v, w) = \|v - w\|.$$

Lause 2.4. Normiavaruuden normin määräämä metriikka on metriikka, eli se toteuttaa seuraavat ehdot.

- (M1) $\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|$ kaikilla $x, y, z \in V$.
 (M2) $\|x - y\| = \|y - x\|$ kaikilla $x, y \in V$.
 (M3) $\|x - y\| = 0$ jos ja vain jos $x = y$.

Todistus. Tehtävä 2.10 □

Tehtävä 2.10. Todista lause 2.4.

Määritelmä 2.5. Olkoon V normiavaruus. Avaruuden V yksikkökuula $B_V(0, 1)$ sekä yksikköpallo $S_V(0, 1)$ ovat joukot

$$B_V(0, 1) = \{v \in V : \|v\| < 1\}, \quad S_V(0, 1) = \{v \in V : \|v\| = 1\}.$$

Vastaavasti asetetaan

$$B_V(0, r) = \{v \in V : \|v\| < r\}, \quad S_V(0, r) = \{v \in V : \|v\| = r\}.$$

Viimein, suljettu kuula on joukko

$$\overline{B}(0, r) = \{v \in V : \|v\| \leq r\},$$

Tehtävä 2.11. Olkoon V kaikkien rajoitettujen reaalilukujonojen vektoriavaruus ℓ_∞ varustettuna normilla $\|(x_n)\| = \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j|$. Osoita, että tämän normiavaruuden yksikkökuula sisältää äärettömän monta vektoria, joiden kaikkien etäisyys toisistaan on vähintään 0.5.

Tehtävä 2.12. Osoita, että normiavaruuden $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ yksikköpallo sisältää äärettömän monta vektoria, joiden kaikkien etäisyys toisistaan on tasan 1.

Tehtävä 2.13. Osoita, että normiavaruuden $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ suljettu yksikkökuula sisältää äärettömän monta vektoria, joiden kaikkien etäisyys toisistaan on tasan 1.

Määritelmä 2.6. Olkoon V normiavaruus. Sanomme, että normiavaruuden jono (v_j) , $v_j \in V$ kaikilla j , suppenee kohti vektoria v_0 mikäli kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että kaikilla $k \geq N_\varepsilon$, $\|v_j - v_0\| < \varepsilon$.

Tehtävä 2.14. Olkoon (v_n) jono kaikkien rajoitettujen reaalilukujonojen avaruudessa

$$\ell_\infty = \{(x_n) \mid x_j \in \mathbb{R}, \sup_j |x_j| < \infty\}$$

muotoa

$$v_n = (x_j^n)_{j=1}^\infty, \quad x_j^n = \frac{1}{n} \sin(j).$$

Osoita, että tämä jono suppenee kohti nollajonoa $(0, 0, \dots)$ metriikan $\|\cdot\|_\infty$ suhteen.

Tehtävä 2.15. Olkoon (w_m) jono kaikkien rajoitettujen reaalilukujonojen avaruudessa

$$\ell_\infty = \{(x_n) \mid x_j \in \mathbb{R}, \sup_j |x_j| < \infty\}$$

muotoa

$$w_m = (y_k^m)_{k=1}^\infty, \quad y_k^m = \begin{cases} 0, & \text{kun } k \leq m \\ 1, & \text{kun } k > m. \end{cases}$$

Osoita, että tämä jono ei suppene kohti mitään avaruuden ℓ_∞ jonoa metriikan $\|\cdot\|_\infty$ suhteen.

2.2. Rajoitetut lineaarikuvaukset. Seuraavaksi päästään ensimmäiseen määritelmään, jota ei lineaarialgebran kursseilta löydy. Kuten on mainittu vektoriavaruuksien ja normien suhteen, myös lineaarikuvauksia on nimittäin huomattavasti enemmän ja enemmän erilaisia funktionaalianalyysissä kuin lineaarialgebrassa. Erityisesti, äärellisulotteisessa tilanteessa kaikki lineaarikuvaukset ovat *rajoitettuja* seuraavan määritelmän mielessä.

Määritelmä 2.7. Lineaarikuvaus $L: V \rightarrow W$ kahden normiavaruuden välillä on *rajoitettu* mikäli joukko

$$\{\|L(v)\|_W \in \mathbb{R} : v \in V, \|v\|_V \leq 1\}$$

on ylhäältä rajoitettu.

Rajoitetulle lineaarikuvaukselle L merkitsemme

$$\|L\| := \sup\{\|L(v)\| \in \mathbb{R} : v \in V, \|v\|_V \leq 1\}.$$

Rajoittamattomille lineaarikuvauksille L merkitsemme $\|L\| = \infty$.

Huomautus 2.8. Huomaa, että rajoitettu lineaarikuvaus L ei juuri koskaan ole rajoitettu kuvaus siinä mielessä, että $\text{Im}(L)$ olisi rajoitettu joukko. Rajoitettua lineaarikuvausta kutsutaan joskus myös jatkuvaksi lineaarikuvaukseksi, ja syy on siinä että *lineaarikuvaus on jatkuva jos ja vain jos se on rajoitettu*. Tutkitaan tätä hieman.

Huomataan alkuun että lineaarikuvaus $L: V \rightarrow W$ on jatkuva pisteessä v_0 jos ja vain jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ s.e.

$$\|L(v_0) - L(v)\| < \varepsilon \text{ kaikilla } v \text{ s.e. } \|v_0 - v\| < \delta.$$

Toisin sanottuna,

$$L(v) \in B_W(L(v_0), \varepsilon) \text{ kaikilla } v \in B_V(v_0, \delta).$$

Koska kuvaus L on lineaarinen, niin edelläoleva pätee jos ja vain jos

$$L(v - v_0) \in B_W(L(0), \varepsilon) \text{ kaikilla } (v - v_0) \in B_V(0, \delta).$$

Erityisesti lineaarikuvaus on jatkuva pisteessä v_0 jos ja vain jos se on jatkuva origossa.

Jos kuvaus L ei ole jatkuva, niin nyt siis on olemassa $\varepsilon_0 > 0$ ja s.e. kaikilla $n \geq 1$ löytyy piste $v_n \in B_V(0, \frac{1}{n})$ jolla $L(v_n) \notin B_W(0, \varepsilon_0)$. Täten erityisesti pisteille $w_n = nv_n$ pätee, että $w_n \in B_V(0, 1)$ ja $L(w_n) \notin B_W(0, n\varepsilon_0)$, eli $\|L(w_n)\| \geq n\varepsilon_0$ kaikilla $n \geq 1$. Täten kuvaus ei siis voi olla rajoitettu. Vastaavalla todistuksella nähdään, että jos kuvaus L ei ole rajoitettu, ei se voi myöskään olla jatkuva.

Tehtävä 2.16. Osoita, että derivointikuvaus

$$D: C^1([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow C([0, 1], \mathbb{R}), \quad D(f) = f'$$

on rajoitettu lineaarikuvaus kun avaruus C^1 varustetaan normilla $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ ja avaruus C^0 varustetaan normilla $\|\cdot\|_\infty$.

Tehtävä 2.17. Osoita, että derivointikuvaus

$$D: C^1([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow C([0, 1], \mathbb{R}), \quad D(f) = f'$$

ei ole rajoitettu lineaarikuvaus kun avaruudet C^1 ja C^0 varustetaan kummatkin normilla $\|\cdot\|_\infty$.

Tehtävä 2.18. Analyysin peruslause sanoo että lineaarikuvaus

$$L: C^0([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow C^1([0, 1], \mathbb{R}), \quad (L(f))(x) = \int_0^x f(t) dt$$

on lineaarinen isomorfismi.

Näytä, että kun sekä lähtö että maali varustetaan normilla $\|\cdot\|_\infty$, kuvaus L on rajoitettu mutta sen käänteiskuvaus ei ole rajoitettu.

Tehtävä 2.19. Olkoon $C_{\text{raj}}^0([0, 1], \mathbb{R})$ kaikkien rajoitettujen jatkuvien kuvausten $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ muodostama vektoriavaruus. Osoita, että kuvaus $E: C_{\text{raj}}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $E(f) = f(0)$ on rajoitettu lineaarikuvaus kun C_{raj}^0 varustetaan normilla $\|\cdot\|_\infty$.

Tehtävä 2.20. Olkoon $C_{\text{raj}}^0([0, 1], \mathbb{R})$ kaikkien rajoitettujen jatkuvien kuvausten $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ muodostama vektoriavaruus. Osoita, että kuvaus $E: C_{\text{raj}}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $E(f) = f(0)$ ei ole rajoitettu lineaarikuvaus kun C_{raj}^0 varustetaan normilla $\|\cdot\|_1$.

Tehtävä 2.21. Olkoot V ja W normiavaruuksia sekä $L_{\text{raj}}(V, W)$ kaikkien rajoitettujen lineaarikuvausten $V \rightarrow W$ kokoelma. Osoita, että määritelmän 2.7 antama $\|L\|$ on normi vektoriavaruudessa $L_{\text{raj}}(V, W)$.

Tehtävä 2.22. Olkoot V ja W kaksi normiavaruutta. Osoita, että kaikkien rajoitettujen lineaarikuvausten $V \rightarrow W$ kokoelma $L_{\text{raj}}(V, W)$ on kaikkien lineaarikuvausten $V \rightarrow W$ kokoelman $L(V, W)$ vektorialiavaruus.

Määritelmä 2.9. Olkoon $(V, \|\cdot\|)$ normiavaruus. Sen osajoukko $A \subset V$ on *rajoitettu*, mikäli

$$\|A\| := \sup\{\|v\| : v \in A\} < \infty.$$

Tehtävä 2.23. Osoita, että vektoriavaruuden V osajoukko A on rajoitettu jos ja vain jos on olemassa $r > 0$ jolle pätee $A \subset B(0, r)$.

Tehtävä 2.24. Olkoon $L: V \rightarrow W$ lineaarikuvaus. Osoita, että jos $\text{Im}(L)$ on rajoitettu joukko, niin L on vakiokuvaus $v \mapsto 0$.

Tehtävä 2.25. Olkoon $L: V \rightarrow W$ lineaarikuvaus. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.

- (1) Kuvaus L on rajoitettu.
- (2) Joukko $L(B_V(0, 1))$ on rajoitettu.
- (3) Joukko $L(\overline{B}_V(0, r))$ on rajoitettu jollakin $r > 0$.
- (4) Joukko $L(S_V(0, 1))$ on rajoitettu.

Tehtävä 2.26. Osoita, että vektoriavaruuden V kaksi normia $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ ovat ekvivalentit jos ja vain jos sekä lineaarinen isomorfismi $L: (V, \|\cdot\|_1) \rightarrow (V, \|\cdot\|_2)$, $L(v) = v$ että sen käänteiskuvaus ovat rajoitettuja lineaarikuvauksia.

Tehtävä 2.27. Olkoot V, W ja Z normiavaruuksia sekä $L_1: V \rightarrow W$ ja $L_2: W \rightarrow Z$ lineaarikuvauksia. Osoita, että $\|L_2 \circ L_1\| \leq \|L_2\| \cdot \|L_1\|$.

Tehtävä 2.28. Jatkoa tehtävälle 2.27. Anna esimerkki, jossa epäyhtälö on aito.

Määritelmä 2.10. Normiavaruuksien välinen lineaarikuvaus $L: V \rightarrow W$ on *isometrinen upotus* mikäli

$$\|L(v)\|_W = \|v\|_V$$

kaikilla $v \in V$.

Isometrinen upotus on *isometria*, mikäli se on bijektio.

Tehtävä 2.29. Osoita, että avaruudet $P([0, 1], \mathbb{R})$ ja $P(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ovat isometriset kun ne kumpikin varustetaan Tehtävän 2.4 normilla.

Huomautus 2.11. Kontrastina edelliseen tehtävään, avaruudet $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ ja $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ eivät uskoakseni ole isometrisia varustettuna millään normilla, mutta en äkkiseltään tiedä miten tämän todistaisi. Katsotaan jos luentoön mennessä keksin jotain.

Tehtävä 2.30. Olkoon ℓ_{fin} kaikkien niiden reaalilukujonojen (x_n) joukko, joilla ainoastaan äärellisen monella $j \in \mathbb{N}$ pätee $x_j \neq 0$.

Muodosta normit sekä tälle avaruudelle että polynomiavaruudelle $P(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sekä isometria luomiesi normiavaruuksien välille.

3. KANNAT JA BANACHIN AVARUUKSET

Tässä kappaleessa päästään viimein käsiksi siihen, että miksi tähänastiset esimerkit ovat 'ääretönulotteisia'. Erityisesti tässä luvussa aletaan erkaantua täysin lineaarialgebran kurssin juonesta, koska kannat ovat paljon monimutkaisempia funktioavaruuksien tilanteessa.

3.1. Kannat. Lineaarisen riippumattomuuden sekä kannan määritelmät ovat edelleen samat kuin lineaarialgebrassa.

Määritelmä 3.1. Olkoon V vektoriavaruus ja $\mathcal{K} \subset V$ kokoelma vektoreita. Merkitään^a

$$\langle \mathcal{K} \rangle := \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k \mid a_j \in \mathbb{K}, v_j \in \mathcal{K}, k \in \mathbb{N}\}.$$

Joukkoa $\langle \mathcal{K} \rangle$ kutsutaan *joukon $\mathcal{K}$ virittämäksi joukoksi*.

Sanomme että kokelma $\mathcal{K}$:

- (1) on *lineaarisesti riippumaton*, mikäli kaikilla $w \in \mathcal{K}$, $w \notin \langle \mathcal{K} \setminus \{w\} \rangle$.
- (2) *virittää avaruuden V* mikäli $\langle \mathcal{K} \rangle = V$.
- (3) on *avaruuden V kanta* mikäli se on lineaarisesti riippumaton ja virittää avaruuden V .

Jos $\mathbb{K}$ -vektoriavaruudella on äärellinen kanta, kutsumme sitä *äärellisulotteiseksi vektoriavaruudeksi*, muussa tapauksessa *ääretönulotteiseksi vektoriavaruudeksi*.

^aHuomaa, että tässä on kyseessä nimenomaan *äärelliset* lineaarikombinaatiot.

Esimerkki 3.2.

Tehtävä 3.1. Asetetaan kaikilla $j \in \mathbb{N}$, $f_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_j(x) = x^j$.

Osoita, että $\{f_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ on avaruuden $P(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ kanta.

Esimerkki 3.3. Asetetaan kaikilla $j \in \mathbb{N}$, $f_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_j(x) = x^j$.

Osoita, että $\{f_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ei ole avaruuden $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ kanta.

Tehtävä 3.2. Olkoon V vektoriavaruus ja $A \subset V$ mikä tahansa epätyhjä osajoukko. Osoita, että $\langle A \rangle$ on avaruuden V vektoriavaruus.

Tehtävä 3.3. Olkoot $\mathcal{K}$ ja $\mathcal{K}'$ kaksi lineaarisesti riippumatonta vektoriavaruuden V osajoukkoa. Osoita, että $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}'$ on myös lineaarisesti riippumaton.

Tehtävä 3.4. Olkoon V vektoriavaruus. Osoita, että mikäli V sisältää äärettömän lineaarisesti riippumattoman osajoukon, niin V on välttämättä ääretönulotteinen.

Lineaarialgebrassa todistetaan, että jokaisessa kannassa on sama määrä alkioita, ja erityisesti vektoriavaruuden dimensioksi voidaan määrittellä sen minkä tahansa kannan alkioidepn lukumäärä. Funktionaalianalyysissä kannat ovat useimmiten äärettömiä, ja määrittelemme tällaisten vektoriavaruuksien dimension 'äärettömäksi'. Äärettömyyksiä

kuitenkin on useampaa eri kokoa, ja hienovaraisempi määritelmä olisi seuraavan tuloksen nojalla mahdollista; emme kuitenkaan tule tarvitsemaan tällaista hienovaraisuutta tällä kurssilla, joten sivuutamme todistuksen.

Lause 3.4. *Olkoon V vektoriavaruus ja $\mathcal{A}$ sekä $\mathcal{B}$ sen kaksi kantaa. Tällöin on olemassa bijektio $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$.*

Todistus. Sivuuetaan, ei tarvita jatkossa. (Jos haluat todistaa, niin huomaa että jokainen kannan $\mathcal{A}$ alkio voidaan ilmaista äärellisenä lineaarikombinaationa kannan $\mathcal{B}$ vektoreista, ja toisinpäin. Lisäksi huomaa, että millä tahansa äärettömällä joukolla on sama mahtavuus kun sen äärellisten osajoukkojen kokoelmalla, ja jokainen kannan äärellinen osajoukko virittää äärellisulotteisen aliavaruuden.) $\square$

3.1.1. *Zornin lemma.* (Tämä osio voi vaikuttaa hieman abstraktilta, jos se ahdistaa niin sen voi sivuuttaa kunnes käydään se luennolla ja ottaa siihen asti Lauseen 3.8 tunnettuna faktana.)

Lineaarialgebran kurssilla oli helppo perustella, miksi annetuilla vektoriavaruuksilla on aina kanta. Funktionaalianalyysin tilanteessa, tutkittaessa ääretönulotteisia vektoriavaruuksia, on tilanne hieman haastavampi. Oletetaan, että sinulla on vektoriavaruus V , ja olet todistanut että sillä ei ole äärellistä kantaa esimerkiksi tehtävän 3.4 tekniikalla. Haluaisit kuitenkin löytää sille jonkin, äärettömän, kannan. Inspiroituneena lineaarialgebran tekniikoista, lähdet rakentamaan kamaa seuraavalla tekniikalla:

- (1) Otetaan jokin vektori $v \in V \setminus \{0\}$, ja muodostetaan triviaalisti lineaarisesti riippumaton joukko $\mathcal{K} = \{v\}$.
- (2) Katsotaan, päteekö $\langle \mathcal{K} \rangle = V$.
 - (a) Jos pätee, olemme valmiita.
 - (b) Jos ei päde, valitaan jokin vektori joukosta $V \setminus \langle \mathcal{K} \rangle$ ja lisätään se joukkoon $\mathcal{K}$, jonka jälkeen palataan kohdan (2) alkuun.

Tämä prosessi vaikuttaa hyvältä, ja se synnyttää lineaarisesti riippumattoman joukon. Ongelmana on kuitenkin se, että syntynyt joukko ei ole välttämättä kanta; jos avaruudesta $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ valitaan tällä prosessilla vektorit $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, ..., saadaan lineaarisesti riippumaton osajoukko, joka virittää ainoastaan vektoriavaruuden $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aliavaruuden $P(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ eikä koko avaruutta.

Tilanteen voi korjata (ainakin) kahdella tavalla. Ensimmäinen tapa olisi lisätä ylläolevaan skeemaan uusi askel:

- (3) Kun kohdan (2) algoritmi on valmis, katsotaan päteekö $\langle \mathcal{K} \rangle = V$.
 - (a) Jos pätee, olemme valmiita.

- (b) Jos ei päde, valitaan jokin vektori joukosta $V \setminus \langle \mathcal{K} \rangle$ ja lisätään se joukkoon $\mathcal{K}$, jonka jälkeen palataan kohdan (3) alkuun.

Tämä tuottaa isomman lineaarisesti riippumattoman joukon, mutta ei edelleenkään välttämättä kantaa; saattaisi olla että aiemmassa esimerkissä olemme nyt lisänneet joukkoon $\mathcal{K}$ vektorit $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \sin(2x)$, $x \mapsto \sin(3x)$, $\dots$, eikä joukosta $\langle \mathcal{K} \rangle$ vielääkään löydy esimerkiksi vektoria $x \mapsto |x| \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Täten meidän pitäisi edelleen laajentaa skeemaamme lisäämällä kohdan (4), joka ei myöskään välttämättä riittäisi, joten edelleen pitäisi lisätä kohdat (5), (6), (7), $\dots$ jne. (Ja kun ollaan lisätty äärettömän monta kohtaa niin vielääkään ei välttämättä riitä³.) Tilanne vaikuttaa leviävän jo vähän käsiin, ja syynä on se että yritämme käyttää tavallista induktiota kun oikea ratkaisu olisi nk. *transfinitiinen induktio*. Tällä kurssilla ei tähän kiehtovaan työkaluun harmi kyllä ehditä paneutua, vaan käytämme vaihtoehtoa kaksi: *Zornin Lemmaa*.

Ennen Zornin lemmän esittämistä, muutama taustamääritelmä on tarpeen.

Määritelmä 3.5. Joukossa A määritelty relaatio $R \subset A \times A$ on *osittainen järjestys* mikäli

- (1) aRa kaikilla $a \in A$,
- (2) mikäli $a, b \in A$ siten, että aRb ja bRa , niin $a = b$, ja
- (3) kaikilla $a, b, c \in A$, mikäli aRb ja bRc , niin aRc .

Osittain järjestetyn joukon *maksimaalinen alkio* on mikä tahansa alkio $m \in A$ jolle pätee, että ei ole olemassa alkioita $a \in A$ jolle mRa .

Osittainen järjestys on *täysi järjestys* mikäli millä tahansa $a, b \in A$ joko aRb tai bRa . Osittain järjestetyn joukon täysin järjestettyä osajoukkoa kutsutaan *ketjuksi*. Osittain järjestetyn joukon A alkio $m \in A$ on ketjun $V \subset A$ *yläraja*, mikäli aRm kaikilla $a \in V$.

Tehtävä 3.5. Osoita että joukossa $C([0, 1], \mathbb{R})$ relaatio

$$fRg \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \text{ kaikilla } x \in [0, 1]$$

on osittainen järjestys. Muodosta jokin tämän osittain järjestetyn joukon ketju.

Esimerkki 3.6. Osoita, että joukkojen inklusio on osittainen järjestys kaikkien tason osajoukkojen kokoelmassa. Näytä, että jokaisella tämän osittain järjestetyn joukon ketjulla on yläraja.

³Jos on joskus kohdannut urallaan *ordinaaleja*, niin tämä saattaa näyttää hieman tutulta.

Lemma 3.7 (Zornin lemma). *Olkoon $(A, \leq)$ osittain järjestetty joukko. Mikäli jokaisella joukon A ketjulla on yläraja, niin koko joukolla A on ainakin yksi maksimaalinen alkio.*

Todistus. Ekvivalenttia valinta-aksiooman kanssa. Todistus sivuutetaan, Zornin lemmän voi ottaa halutessaan vaikka joukko-opin aksioomana; kts. matemaattisen logiikan syventävät opinnot.

Perusteluna voi ajatella, että jos joukolla A ei olisi maksimaalista alkioita, niin jokaisella alkioilla $a \in A$ löytyisi alkio $b \in A$ s.e. aRb . Aloittamalla mistä tahansa alkioista ja lisäämällä aina suurempia alkioita voi muodostaa⁴ maksimaalisen ketjun, jolle Zornin Lemma antaa ylärajan ja siten maksimaalisen alkion koko joukolle. $\square$

Lause 3.8. *Jokaisella vektoriavaruudella on kanta.*

Todistus. Tehtävät 3.6, 3.7 ja 3.8. $\square$

Tehtävä 3.6. Olkoon V vektoriavaruus. Osoita, että vektoriavaruuden V kaikkien lineaarisesti riippumattomien osajoukkojen kokoelma $\mathcal{A}$ on osittain järjestetty joukko kun se varustetaan relaatiolla $\subset$.

Tehtävä 3.7. Olkoon V vektoriavaruus ja $\mathcal{A}$ Tehtävän 3.6 kokoelma. Osoita, että jokaisella ketjulla tässä osittain järjestetyssä joukossa on yläraja.

Tehtävä 3.8. Olkoon V vektoriavaruus ja $\mathcal{A}$ Tehtävän 3.6 kokoelma. Osoita, että tämän kokoelman $\mathcal{A}$ mikä tahansa maksimaalinen alkio on vektoriavaruuden V kanta.

3.2. Täydellisyys. Avaruuden täydellisyys on metristen avaruuksien kurssilla yksi monista annetuista määritelmistä, lineaarialgebran kurssilla lähes itsestäänselvää ja tällä kurssilla analyysin elinehto. Hieman kärjistettynä, *analyysiä ei voi tehdä ilman täydellisyyttä*. Täydellisyys-tarpeiden takia myös meillä on käytössä aina täydellinen skalaarikunta $\mathbb{K}$ eikä esimerkiksi $\mathbb{Q}$.

Täydellisyyden määritelmä on hieman tekninen, mutta oleellisesti täydellisessä avaruudessa: “Ne jonot, joiden kuuluukin supeta, suppevat.” Tämä on tärkeää esimerkiksi tilanteessa, jossa ollaan ratkaisemassa jotain osittaisdifferentiaaliyhtälöä, jossa emme saa ratkaisua suoraan vaan jollain iteratiivisella metodilla muodostamme jonon funktioita jotka jossain mielessä approksimoivat haluttua ratkaisua. Täydellisyys takaa että tällainen approksimaatio varmasti myös vastaa jotakin rajafunktiota.

⁴Conditions may apply.

Määritelmä 3.9. Normiavaruuden V jono (x_n) on *Cauchyn jono* mikäli kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että kaikilla $i, j \geq N_\varepsilon$ pätee $\|x_i - x_j\| < \varepsilon$.

Huomaa, että jokainen suppeneva jono on aina Cauchyn jono, sillä mikäli jonolla (y_k) on raja-arvo y_0 , niin

$$\|y_i - y_j\| \leq \|y_i - y_0\| + \|y_0 - y_j\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tehtävä 3.9. Osoita, että Cauchyn jono on aina rajoitettu.

Määritelmä 3.10. Metrinen avaruus *täydellinen*, mikäli jokaisella Cauchy:n jonolla on raja-arvo.

Huomautus 3.11. Täydellisissä metrisissä avaruuksissa lukujonon suppeneminen on eräässä mielessä jonon 'sisäinen' ominaisuus. Jonon suppenemisen tarkistaminen määritelmästä lähtien vaatii, että sinulla on jokin tieto tai arvaus raja-arvoehdokkaasta. Täydellisessä metrisessä avaruudessa sinun tarvitsee vain katsoa jonon alkioita ja niiden välisiä etäisyyksiä.

Tehtävä 3.10. Osoita, että kaikkien rajoitettujen lukujonojen avaruus ℓ_∞ on täydellinen normin $\|\cdot\|_\infty$ suhteen.

Esimerkki 3.12. Osoita, että polynomien avaruus $P([0, 1], \mathbb{R})$ ei ole täydellinen sup-normin suhteen.

Tehtävä 3.11. Osoita, että jatkuvien kuvausten avaruus $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ ei ole täydellinen L^1 -normin suhteen.

Tehtävä 3.12. Osoita, että jatkuvien kuvausten avaruus $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ on täydellinen sup-normin suhteen.

Tehtävä 3.13. Osoita, että jatkuvasti derivoituvien kuvausten avaruus ei ole täydellinen sup-normin suhteen.

3.3. Separoituvuus. Kannan käyttäminen vektoriavaruuksissa on usein työlästä, sillä kannat tuppaavat olemaan aika isoja funktioavaruuksissa; Banachin avaruuden kanta on aina joko äärellinen tai ylinumeroituva. (Todistetaan tämä ehkä myöhemmin.) Erityisesti täydellisissä metrisissä avaruuksissa meille riittääkin usein tutkia jotain pienempää osajoukkoa, jonka virittämän joukon alkioilla voidaan approksimoida mitä tahansa vektoriavaruuden funktiota.

Määritelmä 3.13. Olkoon V normiavaruus ja A sen osajoukko. Joukon A *sulkeuma* on joukko

$$\overline{A} := \{v \in V \mid \text{on olemassa } (a_n), a_j \in A \text{ s.e. } \lim_j a_j = v\}.$$

Joukon sulkeuma koostuu siis kaikista niistä vektoreista, joita voi approksimoida joukon A vektoreilla.

Esimerkki 3.14. Vektoriavaruuden sulkeuma on aina vektoriavaruus.

Tehtävä 3.14. Olkoon V normiavaruus, $A \subset V$ sen epättyhjä osajoukko ja $x \in V$. Merkitään

$$d(x, A) = \inf\{\|x - a\| : a \in A\}.$$

Osoita, että millä tahansa epättyhjällä joukolla $A \subset V$,

$$\overline{A} = \{x \in V \mid d(x, A) = 0\}.$$

Määritelmä 3.15. Vektoriavaruus V on *separoituva*, mikäli on olemassa numeroituva joukko $A \subset V$ jolle pätee $\overline{A} = V$.

Tehtävä 3.15. Osoita, että itseisesti summautuvien reaalilukujonojen avaruus

$$\ell^1(\mathbb{R}) := \left\{ (x_n) \mid x_n \in \mathbb{R}, \sum_j |x_j| < \infty \right\}$$

on separoituva, kun se varustetaan normilla $\|\cdot\|_1$.

(Vihje: $\sum_j 2^{-j}\varepsilon = \varepsilon$.)

Esimerkki 3.16. Osoita, että rajoitettujen reaalilukujonojen avaruus varustettuna sup-normilla ei ole separoituva.

(Vihje: Huomaa ensin, että joukko

$$\{(x_n) \mid x_n \in \{0, 1\}\}$$

on ylinumeroituva.)

Tehtävä 3.16. Osoita, että $C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, eli *rajoitettujen* jatkuvien funktioiden kokoelma ei ole separoituva kun se varustetaan sup-normilla.

Tehtävä 3.17. Osoita, että $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ on separoituva. (Saat käyttää Stonen ja Weierstrassin lausetta D.3.)

Huomautus 3.17. Olkoon V $\mathbb{R}$ -vektoriavaruus varustettuna normilla ja $A \subset V$ on numeroituva joukko s.e. $\overline{A} = V$. Nyt

$$W := \{q_1 a_1 + \dots + q_n a_n \mid q_j \in \mathbb{Q}, a_j \in A, n \in \mathbb{N}\}$$

on numeroituva $\mathbb{Q}$ -vektoriavaruus, jonka sulkeuma on edelleen koko V . Tälle $\mathbb{Q}$ -vektoriavaruudelle löytyy numeroituva kanta K , joka “ $\mathbb{Q}$ -virittää” avaruuden W , joka puolestaan on tiheä avaruudessa V . Eri-tyisesti, separoivalle normiavaruudelle V löytyy aina lineaarisesti riip-pumaton numeroituva joukko K s.e.

$$V = \overline{\langle K \rangle}.$$

Tällainen joukko siis aina löytyy jokaisesta separoituvasta normiavaruudesta. Mikäli numeroituva joukko $K = \{v_n\}$ toteuttaa lisäehdon “jokaisella $v \in V$ on olemassa *yksikäsitteinen* jono skalaareja (a_n) , $a_n \in \mathbb{K}$ s.e. sarja⁵ $v = \sum a_j v_j$, niin joukkoa K kutsutaan *Schauderin kannaksi*. Schauderin kannan olemassaolo on epätriviaalia; edes kaikilla separoituvilla Banachin avaruuksilla ei ole Schauderin kantaa. Palataan Schauderin kantaan (mahdollisesti) Hilbertin avaruuksien yhteydessä.

Tehtävä 3.18. Osoita, että normiavaruus V on separoituva jos ja vain jos sen osajoukko $S_V(0, 1)$ on separoituva.

Tehtävä 3.19. Osoita, että normiavaruus V on separoituva jos ja vain jos sen osajoukko $B_V(0, 1)$ on separoituva.

3.4. Banachin avaruudet.

Määritelmä 3.18. Täydellistä normiavaruutta kutsutaan *Banachin avaruudeksi*.

Määritelmä 3.19. Olkoon V normiavaruus ja (v_n) jono sen vektoreita. Sanomme, että *sarja* $\sum_{j=1}^{\infty} \text{suppenee}$, mikäli vektorien $S_k := \sum_{j=1}^k$ muodostama jono suppenee.

Jonoa (v_n) vastaava sarja *suppenee itseisesti* mikäli reaalityyppinen sarja $\sum_j |v_j|$ suppenee.

Tehtävä 3.20. Olkoon V Banachin avaruus. Osoita, että jos jonoa (v_n) vastaava sarja suppenee itseisesti, niin sitä vastaava sarja myös suppenee.

Lause 3.20. Olkoon V normiavaruus. Tällöin on olemassa Banachin avaruus W sekä lineaarinen isometria $L: V \rightarrow W$ s.e. $L(V) = W$.

Todistus. Kappaleen loput tehtävät – käymme myös luennolla hieman läpi todistuksen suuria linjoja. $\square$

Seuraavien tehtävien pääosissa ovat normiavaruus $(V, \|\cdot\|_V)$, seminormiavaruus $(\mathcal{C}, N)$ sekä normiavaruus $(W, \|\cdot\|)$.

Tehtävä 3.21. Olkoon $(V, \|\cdot\|_V)$ normiavaruus ja $\mathcal{C}$ kaikkien avaruuden V Cauchyn jonojen kokoelma. Osoita, että $\mathcal{C}$ on vektoriavaruus.

Tehtävä 3.22. Olkoon edelleen $\mathcal{C}$ kaikkien avaruuden V Cauchyn jonojen kokoelma. Osoita, että seuraava kuvaus $N: V \rightarrow \mathbb{R}$ on hyvinmääritelty ja että sillä varustettuna $\mathcal{C}$ on *seminormiavaruus*:

$$N((v_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_V.$$

⁵Kts. Määritelmä 3.19.

Tehtävä 3.23. Määritetään edellisen tehtävän vektoriavaruuksessa $\mathcal{C}$ ekvivalenssirelaatio asettamalla $(x_n) \simeq (y_n)$ mikäli erotusjono $(x_n - y_n)$ suppenee kohti nollavektoria 0_V .

Osoita, että tämä ekvivalenssirelaatio on ekvivalenssirelaatio, eli että

- (1) $(x_n) \simeq (x_n)$,
- (2) jos $(x_n) \simeq (y_n)$, niin $(y_n) \simeq (x_n)$, ja
- (3) jos $(x_n) \simeq (y_n)$ ja $(y_n) \simeq (z_n)$, niin $(x_n) \simeq (z_n)$.

Tehtävä 3.24. Olkoon W kaikkien avaruuden $\mathcal{C}$ ekvivalenssiluokkien kokoelma relaation $\simeq$ suhteen, eli joukko $\{A_{(v_n)} \mid (v_n) \in \mathcal{C}\}$, missä

$$A_{(v_n)} = \{(w_n) \in \mathcal{C} \mid (v_n) \simeq (w_n)\}.$$

Osoita, että varustettuna laskutoimituksilla

$$A + B = \{(v_n) + (w_n) \mid (v_n) \in A, (w_n) \in B\}, \quad kA = \{(kv_n) \mid (v_n) \in A\},$$

W on vektoriavaruuks. (Ei tarvitse käydä läpi kaikkia kahdeksaa aksioomaa, sen verran monta että uskot että tämä toimii.)

Tehtävä 3.25. Olkoot asiat kuten yllä. Osoita, että kaikilla $(v_n) \in \mathcal{C}$, $N((x_n)) = N((y_n))$ kaikilla $(x_n), (y_n) \in A_{(v_n)}$.

Tehtävä 3.26. Edellisen tehtävän nojalla avaruudessa W voidaan hyvinmääritellä kuvaus $\|\cdot\|_W$ asettamalla

$$\|A\|_W = N(a),$$

missä a on mikä tahansa joukon A alkio.

Osoita, että $\|\cdot\|_W$ on normi.

Tehtävä 3.27. Muodostetaan kuvaus $L: V \rightarrow W$ s.e. kullakin $v \in V$ valitaan jokin jono $(x_n) \in \mathcal{C}$ joka suppenee kohti vektoria v , muodostetaan tämän ekvivalenssiluokka $A \in W$ ja asetetaan $L(v) = A$.

Osoita, että kuvaus L on

- (1) hyvin määritelty,
- (2) lineaarikuvaus, ja
- (3) isometria.

Tehtävä 3.28. Osoita, että edellisen tehtävän kuvaukselle pätee $\overline{L(V)} = W$.

Todistus. Olkoon $w_0 \in W$. Muodostetaan jono (w_n) , $w_n \in L(V)$ s.e. $w_n \rightarrow w_0$.

Huomataan, että w_0 on muotoa $[(v_j^{(0)})]_{\sim}$, missä $(v_j^{(0)})$ on jokin Cauchyn jono avaruudessa V . Valitaan kullakin $j \in \mathbb{N}$ jono $x_k^{(j)}$ avaruudessa V s.e. $x_k^{(j)} \rightarrow v_j^{(0)}$, kun $k \rightarrow \infty$. Edelleen, valitaan nämä jonot s.e. $\|x_k^{(j)} - v_j^{(0)}\|_V \leq 2^{-j}2^{-k}$ kaikilla $j, k \in \mathbb{N}$

Suppenevat jonot ovat aina Cauchyn jonoja, joten $w_n := [(x_k^{(n)})]_{\sim} \in W$. Edelleen suoraviivainen lasku osoittaa, että

$$\begin{aligned}\|w_n - w_0\|_W &= N((x_k^{(n)}) - (v_k^{(0)})) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k^{(n)} - v_k^{(0)}\|_V \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} 2^{-j} 2^{-k} \\ &= 2^{-n} \rightarrow 0,\end{aligned}$$

kun $n \rightarrow \infty$.

Täten siis $w_0 \in \overline{L(V)}$ ja väite on todistettu. $\square$

Esimerkki 3.21. Osoitetaan, että avaruus W on täydellinen. Olkoon siis (w_n) Cauchyn jono avaruudessa W . Tällöin siis kaikilla $n \in \mathbb{N}$, $w_n = [v_j^{(n)}]_{\sim}$, missä $(v_j^{(n)})_{j=1}^{\infty}$ on sellainen Cauchyn jono avaruudessa V , että

$$N((v_j^{(n)}) - w_n) = 0$$

ja $[\cdot]_{\sim}$ sitä vastaava ekvivalenssiluokka.

Muodostetaan seuraavaksi jonolle (w_n) raja-arvoehdokas w_0 .

Koska kaikilla $n \in \mathbb{N}$ jono $(v_j^{(n)})_{j=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono, erityisesti kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(\{v_j^{(n)} \mid j \geq k\}) = 0.$$

Täten jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ voidaan valita $n_j \in \mathbb{N}$ s.e.

$$\text{diam}(\{v_j^{(n)} \mid j \geq n_j\}) < 2^{-n}.$$

Muodostetaan nyt jono (x_j) , $x_j \in V$ asettamalla $x_j = v_j^{(n_j)}$. Tällöin

$$\begin{aligned}\text{diam}(\{x_j \mid j \geq N\}) &\leq \text{diam}(\{w_n \mid n \geq N\}) + \sum_{k=N}^{\infty} \text{diam}(\{v_j^{(k)} \mid j \geq k\}) \\ &\leq \text{diam}(\{w_n \mid n \geq N\}) + 2^{-N+1} \rightarrow 0,\end{aligned}$$

kun $N \rightarrow \infty$, joten jono (x_j) on Cauchyn jono V :ssä ja täten voidaan asettaa $w_0 = [(x_j)]$.

Osoitetaan seuraavaksi, että $w_n \rightarrow w_0$.

$$\begin{aligned}
\|w_n - w_0\|_W &= \|[(v_j^{(n)})]_{\sim} - [(x_j)]_{\sim}\|_W \\
&= N((v_j^{(n)}) - (x_j)) \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \|v_j^{(n)} - x_j\|_V \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \|v_j^{(n)} - v_j^{(n_j)}\|_V \\
&\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\text{diam}(\{w_k \mid k \geq n\}) + \text{diam}(\{v_k^{(n_k)} \mid k \geq j\}) \right) \\
&= \text{diam}(\{w_k \mid k \geq n\}) \\
&\rightarrow 0,
\end{aligned}$$

kun $n \rightarrow \infty$.

Täten mielivaltainen avaruuden W Cauchyn jono suppenee, eli avaruus on täydellinen.

Huomautus 3.22. Ylläoleva todistus toimii pienin muokkauksin missä tahansa metrisessä avaruudessa.

Huomautus 3.23. Ylläolevissa tehtävissä muodostettiin seminormiavaruuden $\mathcal{C}$ niinkutsuttu *tekijäavaruus*. Näihin palataan myöhemmin yleisemmässä asetelmassa.

3.5. Lisähuomioita. Kannoista on paljon hyötyä. Tällä kurssilla ne ovat usein ylinumeroituvia, joten niistä on hankala repiä ulos matriiseja tai muuta käsin kosketeltavaa, mutta niillä saa silti rakenneltua kaikenlaista.

Huomautus 3.24. Olkoon nyt V ääretönulotteinen vektoriavaruus ja K sen jokin kanta. Nyt mikä tahansa kuvaus $\alpha: K \rightarrow W$, missä W on vektoriavaruus, määrittelee yksikäsitteisen lineaarikuvauksen $F: V \rightarrow W$ kun asetetaan

$$F(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) = a_1 \alpha(v_1) + a_2 \alpha(v_2) + \dots + a_n \alpha(v_n),$$

kun $a_j \in \mathbb{K}$ ja $v_j \in K$.

(Todistus on ylimääräinen harjoitustehtävä ja mahdollinen tenttitehtävä.)

Kantoja käyttämällä voidaan konstruoida kiinnostavia objekteja. Olkoon nyt V ääretönulotteinen vektoriavaruus ja K sen jokin kanta. Määritellään kuvaus $N: V \rightarrow \mathbb{R}$ asettamalla ensin $N(v) = 1$ kaikilla $v \in K$, ja sitten

$$N(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) = \sum_{j=1}^n |a_j|,$$

kun $a_j \in \mathbb{K}$ ja $v_j \in K$. Nyt on helppo nähdä että tämä määrittää avaruuteen normin. *Vektoriavaruus voidaan aina siis varustaa normilla.*

Toisaalta voidaan määritellä funktionaali $\phi: V \rightarrow \mathbb{K}$ valitsemalla jokin kannan K numeroituvasti ääretön osajoukko $A := \{k_1, k_2, \dots\}$ ja asettamalla $\phi(k_j) = j$ kaikilla $k_j \in A$ ja $\phi(k) = 0$ kun $k \in K \setminus A$. Tämä funktionaali on nyt rajoittamaton normiavaruuden (V, N) funktionaali. *Jokaisessa ääretönulotteisessa vektoriavaruudessa voidaan siis aina määritellä rajoittamaton lineaarikuvaus.* (Hieman muokkaamalla ylläolevaa ideaa saadaan aikaan myös rajoittamattomia operaattoreita, jopa bijektiivisiä rajoittamattomia operaattoreita.)

Edelleen voidaan nyt määritellä

$$\tilde{N}: V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{N}(v) = N(v) + |\phi(v)|.$$

On suoraviivaista näyttää että $\tilde{N}$ on normi, ja että se ei ole ekvivalentti normin N kanssa. *Jokaisessa ääretönulotteisessa vektoriavaruudessa voidaan siis aina määritellä kaksi ei-ekvivalenttia normia.*

Huomautus 3.25. Osoitetaan seuraavaksi, että jokaisessa ääretönulotteisessa vektoriavaruudessa on ei-täydellinen normi.

Olkoon tätä varten V ääretönulotteinen vektoriavaruus, K sen Hamelin kanta ja $K_{\mathbb{N}} \subset K$ kannan K numeroituvasti ääretön osajoukko $\{k_1, k_2, \dots\}$. Asetetaan ensin $N(k_j) = 2^{-j}$ kaikilla $k_j \in K_{\mathbb{N}}$, $N(k) = 1$ kaikilla $k \in K \setminus K_{\mathbb{N}}$ ja määritetään avaruuteen V normi asettamalla

$$\|v\| = \|a_1 \hat{k}_1 + \dots + a_m \hat{k}_m\| = \sum_{j=1}^m |a_j| N(\hat{k}_j),$$

missä $a_i \in \mathbb{K}$, $\hat{k}_i \in K$ ja $a_1 \hat{k}_1 + \dots + a_m \hat{k}_m$ on vektorin v yksikäsitteinen esitys kantavektoreiden lineaarikombinaationa. (Ylimääräinen HT: näytä että tämä on normi.)

Muodostetaan nyt jono (v_n) asettamalla

$$v_n = \sum_{j=1}^n k_j.$$

Huomataan heti alkuun että

$$\sum_{j=1}^n \|k_j\| = \sum_{j=1}^n 2^{-j} = 1,$$

joten sarja suppenee itseisesti. Täten tehtävän 3.20 tuloksen nojalla mikäli avaruus on täydellinen, niin myös osasummien jono (v_n) suppenee.

Oletetaan nyt, että on olemassa raja-arvo $v_0 = \lim_n v_n$. Tämän raja-arvon voi esittää yksikäsitteisenä lineaarikombinaationa kantavektoreista, eli saadaan $v_0 = a_1 \hat{k}_1 + \dots + a_m \hat{k}_m$. Koska tässä lineaarikombinaatiossa on vain äärellinen määrä kantavektoreita, niin löytyy välttämättä $k_N \in K_{\mathbb{N}}$ s.e. $k_N \neq \hat{k}_1, \dots, \hat{k}_m$. Täten kaikilla $n \geq N$ pätee,

että

$$\|v_n - v_0\| \geq \|k_N\| = 2^{-N},$$

eli $\|v_n - v_0\| \not\rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$. Täten jono (v_n) ei voi supeta, ja alkuperäinen väite siis pätee.

4. HAHNIN JA BANACHIN LAUSE

Hahnin ja Banachin lause on eräs kurssin tärkeimpiä lauseita, ehkä tärkein. Eräänä syynä on se, että ääretönulotteisissa avaruuksissa monien asioiden olemassaolon osoittaminen on paljon hankalampaa kuin äärellisulotteisessa tilanteessa. Erityisesti rajoitettujen funktionaalien määrittely koko avaruudessa voi olla hankalaa; Hahnin ja Banachin lause antaa kuitenkin tähän loistavan työkalun.

Lause 4.1 (Hahn-Banach). *Olkoon V normiavaruus, A sen aliavaruus ja $L: A \rightarrow \mathbb{K}$ rajoitettu lineaarikuvaus. Tällöin on olemassa rajoitettu lineaarikuvaus $T: V \rightarrow \mathbb{K}$ jolle pätee $\|T\| = \|L\|$.*

Todistus. Kappaleen 4.2 tehtävät. □

Määritelmä 4.2. Normiavaruuden V *duaali* on kaikkien rajoitettujen lineaarikuvausten $V \rightarrow \mathbb{K}$ joukko $L_{\text{raj}}(V, \mathbb{K})$. Erityisesti siis duaali on kaikkien normiavaruuden rajoitettujen funktionaalien kokoelma. Avaruuden V duaalia merkitään yleensä V' , ja jos avaruuden alkioita merkitään v , niin duaalin alkioita usein v' .

Tehtävä 4.1. Osoita, että normiavaruuden duaali on aina epätyhjä.

Määritelmä 4.3. Olkoon V normiavaruus ja $W \subset V$ sen aliavaruus. Avaruuden W *annihilaattori* on

$$\{v' \in V' : v'|_W = 0\}.$$

Tehtävä 4.2. Osoita, että normiavaruuden $(C^{n+1}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{n+1, \infty})$, missä $\|f\|_{n+1, \infty} = \|f\|_{\infty} + \sum_{k=1}^{n+1} \|f^{(k)}\|_{\infty}$, aliavaruuden $P^n([0, 1], \mathbb{R})$ annihilaattorissa on vähintään kaksi alkioita.

4.1. Sublineaariset kuvaukset. Hahn-Banachin lauseen todistus tarvitsee muutaman teknisen aputuloksen missä kuvauksia rajoitetaan normia yleisemmillä sublineaarilla kuvauksilla.

Määritelmä 4.4. Kuvaus $p: V \rightarrow \mathbb{R}$ on *sublineaarinen* mikäli

- (1) $p(v + w) \leq p(v) + p(w)$ kaikilla $v, w \in V$, ja
- (2) $p(\lambda v) = \lambda p(v)$ kaikilla $v \in V$ ja $\lambda > 0$.

Huomaa, että sublineaarisuuden määritelmässä skalaarilla kertominen vaaditaan vain positiivisille skalaareille.

Esimerkki 4.5. Mikä tahansa (semi)normi on sublineaarinen funktio.

Tehtävä 4.3. Osoita, että kuvaus $\ell^{\infty}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_n) \mapsto \limsup_n x_n$ on sublineaarinen.

4.2. Hahn-Banach -lauseen todistus. Hahn-Banach -lauseen todistus vaatii hieman erilaista käsittelyä riippuen siitä, onko kerroinkuntana $\mathbb{R}$ vai $\mathbb{C}$. Käydään tehtävien avulla läpi tapaus $\mathbb{R}$, tapaus $\mathbb{C}$ käsitellään luennolla jollakin tasolla.

4.2.1. Reaalikertoiminen Hahn-Banach.

Huomautus 4.6. Huomaa, että Lemma 4.7 ja Lause 4.8 käsitellään ja todistetaan vektoriavaruuksien asetelmassa, eli normista ei tässä kohdasta vielä puhuta.

Lemma 4.7. *Olko V $\mathbb{R}$ -vektoriavaruus, H sen aliavaruus, $p: V \rightarrow \mathbb{R}$ sublineaarinen kuvaus ja $L: H \rightarrow \mathbb{R}$ lineaarikuvaus jolle pätee $L(v) \leq p(v)$ kaikilla $v \in H$. Tällöin kaikilla $v_0 \in V \setminus H$ on olemassa lineaarikuvaus $F: \langle H \cup \{v_0\} \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ s.e. $F|_H = L$ ja $F(w) \leq p(w)$ kaikilla $w \in \langle H \cup \{v_0\} \rangle$.*

Todistus. Seuraavat neljä tehtävää. □

Tehtävä 4.4. Osoita, että Lemman 4.7 tilanteessa

$$\langle H \cup \{v_0\} \rangle = \{v + \lambda v_0 \mid v \in H, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Kirjoitetaan jatkossa vektoriavaruuden $\langle H \cup \{v_0\} \rangle$ alkiot muodossa $v + \lambda v_0$.

Tehtävä 4.5. Osoita edelleen, että kaikilla $c \in \mathbb{R}$ kuvaus

$$F_c: \langle H \cup \{v_0\} \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_c(v + \lambda v_0) = L(v) + c\lambda$$

on lineaarikuvaus.

Tehtävä 4.6. Osoita edelleen, että

$$\sup_{w \in H} (L(w) - p(w - v_0)) \leq \inf_{w \in H} (p(w + v_0) - L(w)).$$

(Vihje: lähde liikkeelle termistä $L(u) + L(w)$.)

Tehtävä 4.7. Käyttäen edellisen tehtävän tulosta osoita, että on olemassa vakio $c \in \mathbb{R}$ siten, että

$$F_c(v + c\lambda) \leq p(v + c\lambda)$$

kaikilla $v \in H$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$. Todista sitten Lemma 4.7.

(Vihje: tutki erikseen tilanteita $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ ja $\lambda < 0$.)

Lause 4.8. *Olko V $\mathbb{R}$ -vektoriavaruus, H sen aliavaruus, $p: V \rightarrow \mathbb{R}$ sublineaarinen kuvaus ja $L: H \rightarrow \mathbb{R}$ lineaarikuvaus jolle pätee $L(v) \leq p(v)$ kaikilla $v \in H$. Tällöin on olemassa lineaarikuvaus $F: V \rightarrow \mathbb{R}$ s.e. $F|_H = L$ ja $F(w) \leq p(w)$ kaikilla $w \in V$.*

Todistus. Seuraavat kolme tehtävää. □

Tehtävä 4.8. Lauseen 4.8 tilanne. Olkoon $\mathcal{A}$ kaikkien parien (Y, G) kokoelma, missä Y on vektoriavaruus jolla $H \subset Y \subset V$ ja $G: Y \rightarrow \mathbb{R}$ lineaarikuvaus jolle pätee $G|_H = F$ ja $G(v) \leq p(v)$ kaikilla $v \in Y$.

Asetetaan $(Y, G) \leq (Z, T)$ mikäli Y on avaruuden Z vektorialiavaruus ja $T|_Y = G$. Osoita, että $(\mathcal{A}, \leq)$ on osittain järjestetty joukko.

Tehtävä 4.9. Lauseen 4.8 tilanne.

Osoita, että osittain järjestetyn joukon $(\mathcal{A}, \leq)$ jokaisella ketjulla on yläraja. Totea sitten Zornin lemmän avulla että joukossa on täten maksimaalinen alkio.

Tehtävä 4.10. Lauseen 4.8 tilanne.

Osoita, että joukon $(\mathcal{A}, \leq)$ mille tahansa maksimaaliselle alkiolle (X, G) pätee, että $V = X$. (Vihje: Lemma 4.7)

Seuraavaksi siirrytään normiavaruuksien asetelmaan.

Lause 4.9 (Reaalikertoinen Hahn-Banach). *Olkoon V reaalin normiavaruus, A sen vektorialiavaruus ja $h: A \rightarrow \mathbb{R}$ rajoitettu lineaarikuvaus. Tällöin on olemassa lineaarikuvaus $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ jolle pätee $f|_A = h$ ja $\|h\| = \|f\|$.*

Todistus. Tehtävät 4.11–4.13. □

Tehtävä 4.11. Olkoon $h: A \rightarrow \mathbb{R}$ rajoitettu lineaarikuvaus. Osoita, että kuvaus

$$p: V \rightarrow \mathbb{R}, \quad p(x) = \|h\| \cdot \|x\|_V$$

on sublineaarinen.

Tehtävä 4.12. Osoita, että edellisen tehtävän tilanteessa on olemassa rajoitettu funktionaali $F: V \rightarrow \mathbb{R}$ jolle pätee $F|_A = h$ sekä $F(v) \leq \|h\| \cdot \|v\|_V$ kaikilla $v \in V$.

Tehtävä 4.13. Todista reaalikertoiminen Hahnin ja Banachin lause 4.9.

Hahnin ja Banachin lauseella päästään käsiksi siihen, että avaruuden vektoreista saadaan tietoa tutkimalla avaruuden funktionaaleja. Tähän suuntaan seuraava korollaari on varsin hyödyllinen.

Korollaari 4.10. *Olkoon V normiavaruus. Jokaisella $v \in V$ on olemassa $v' \in V'$ s.e. $\|v'\| = 1$ ja $v'(v) = \|v\|$.*

Tehtävä 4.14. Todista ylläoleva korollaari 4.10.

(Vihje: tutki funktionaalia $f \in \langle \{v\} \rangle'$, $f(\lambda v) = \lambda \|v\|$.)

Esimerkki 4.11. Olkoon $V \neq \{0\}$ vektoriavaruus. Tällöin $V' \neq \{0\}$.

Tehtävä 4.15. Olkoon $V \neq \{0\}$. Osoita, että nyt kaikilla $v \in V$,

$$\|v\| = \sup_{\|v'\| \leq 1} |v'(v)| = \sup_{\|v'\|=1} |v'(v)|.$$

(Vihje: Korollari 4.10.)

Tehtävä 4.16. Olkoon V normiavaruus, W sen aito aliavaruus ja $v_0 \in V \setminus W$ piste, jolla $d(v_0, W) > 0$. Osoita, että nyt on olemassa $v' \in V'$ s.e. $v'(v_0) = d(v_0, W)$, $\|v'\| = 1$ ja $v'|_W = 0$.

(Vihje: Käytä Hahn-Banachia.)

Lause 4.12. Normiavaruus V on separoituva jos sen duaali V' on separoituva.

Todistus. Tehtävä 4.17 □

Tehtävä 4.17. Todista Lause 4.12.

Ohje: Valitse tiheä osajoukko $\{v'_n\}$ duaalin yksikköpallolta. Huomaa, että kaikilla n löytyy $v_n \in S_V(0, 1)$ s.e. $v'_n(v_n) \geq \frac{1}{2}$. Tee vastaoletus, että $\{v_n\}$ ei ole tiheä yksikköpallolla, ja sovelta tehtävän 4.16 tulosta joukkoon $Y = \langle \{v_n\} \rangle$. Osoita, että täten saamalles funktionaalille f pätee $\|f - v'_n\| \geq \frac{1}{2}$ kaikilla n .

4.3. Suljetut aliavaruudet.

Määritelmä 4.13. Normiavaruuden V aliavaruus W on *suljettu aliavaruus* mikäli se on suljettu normin määräämän metriikan mielessä, eli jos $\overline{W} = W$.

Tehtävä 4.18. Osoita, että kuvausten $x \mapsto a \sin(x) \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ kokoelma on normiavaruuden $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ suljettu aliavaruus.

Tehtävä 4.19. Osoita, että aliavaruus $P([0, 1], \mathbb{R}) \subset C^0([0, 1], \mathbb{R})$ ei ole suljettu aliavaruus kun $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ on varustettu sup-normilla.

Lause 4.14. Olkoon V normiavaruus ja $f: V \rightarrow \mathbb{K}$ funktionaali joka ei ole vakiokuvaus $v \mapsto 0$. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä.

- (1) f on rajoitettu lineaarikuvaus.
- (2) f on jatkuva kuvaus.
- (3) $\ker(f)$ on vektoriavaruuden V suljettu aliavaruus.
- (4) $\overline{\ker(f)} \neq V$.

Todistus. Kohdat (1) ja (2) ovat yhtäpitäviä Huomautuksen 2.8 nojalla.

Kohta (2) implikoi kohdan (3), sillä suljetun joukon alkukuva jatkuvan kuvauksen suhteen on suljettu metrisen topologian perusteiden nojalla.

Implikaatio (3) $\Rightarrow$ (1): Tehtävä 4.20.

Implikaatio (3) $\Rightarrow$ (4): Koska oletimme että f ei ole vakiokuvaus nolla, niin oltava $\ker(f) \neq V$. Täten ehto (3) implikoi ehdon (4).

Implikaatio (4) $\Rightarrow$ (3): Tehtävä 4.21. $\square$

Tehtävä 4.20. Todista Lauseen 4.14 kohta (3) $\Rightarrow$ (1).

Ohje: Tehdään vastaoletus; f ei ole rajoitettu. Valitaan jono (v_j) vektoreita $v_j \in V$ s.e. $\|v_j\|_V \leq 1$ ja $|f(v_j)| \geq j$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$.

Osoita ensin, että

$$\frac{v_1}{f(v_1)} - \frac{v_k}{f(v_k)} \in \ker(f) \text{ kaikilla } k \in \mathbb{N}$$

ja sitten, että

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{v_1}{f(v_1)} - \frac{v_k}{f(v_k)} \right) = \frac{v_1}{f(v_1)}.$$

Totea, että $v_1/f(v_1) \in \overline{\ker(f)} \setminus \ker(f)$.

Tehtävä 4.21. Todista Lauseen 4.14 kohta (3) $\Rightarrow$ (4).

Ohje: Tehdään vastaoletus; $\ker(f)$ ei ole suljettu aliavaruus. (Huomaa, että sekä $\ker(f)$ että $\overline{\ker(f)}$ ovat kummatkin kuitenkin aliavaruuksia.) Valitaan $v \in \overline{\ker(f)} \setminus \ker(f)$ ja $w \in V$. Kirjoitetaan

$$w = \underbrace{\left(w - \frac{f(w)}{f(v)}v \right)}_A + \underbrace{\left(\frac{f(w)}{f(v)}v \right)}_B.$$

Osoita, että termi A kuuluu joukkoon $\ker(f) \subset \overline{\ker(f)}$. Näytä, että myös termi B kuuluu joukkoon $\overline{\ker(f)}$. (Muista, että ytimen sulkeuma on vektorialiavaruus.) Päättelä tästä, että $w \in \ker(f)$. Totea, että väite on nyt todistettu.

Lemma 4.15. Normiavaruuden V aliavaruus W on tiheä^a jos ja vain jos sen annihilattori on $\{0\}$.

^aEli että $\overline{W} = V$

Todistus. Seuraavat kaksi tehtävää. $\square$

Tehtävä 4.22. Osoita, että jos jatkuvan funktionaalin rajoittuma tiheään joukkoon on nolla, niin funktionaali on vakiokuvaus nolla.

Tehtävä 4.23. Olkoon W vektorialiavaruuden V aliavaruus ja $v \in V \setminus \overline{W}$.

Määrittele funktionaali $F: \langle W \cup \{v\} \rangle \rightarrow \mathbb{K}$ asettamalla $F(w + \lambda v) = \lambda$. Osoita Lausetta 4.14 käyttäen, että F on rajoitettu lineaarikuvaus $\langle W \cup \{v\} \rangle \rightarrow \mathbb{K}$. Viimeistelee todistus Hahn-Banachilla.

4.3.1. *Kompleksikertoiminen Hahn-Banach.* Kompleksikertoiminen versio vaatii hieman erilaisen alun, sillä kompleksiluvuilla ei ole yhtä luonnollista järjestysrelaatiota kuin reaaliluvuilla.

Lemma 4.16. *Olkoon V $\mathbb{C}$ -vektoriavaruus.*

(1) *Olkoon $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ -lineaarinen lineaarikuvaus. Tällöin*

$$f_{\mathbb{C}}: V \rightarrow \mathbb{C}, \quad f_{\mathbb{C}}(v) = f(v) - if(iv)$$

on $\mathbb{C}$ -lineaarinen lineaarikuvaus.

(2) *Olkoon $F: V \rightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$ -lineaarinen funktionaali. Tällöin $\operatorname{Re}(F)$ on reaaliarvoinen funktionaali ja $(\operatorname{Re}(F))_{\mathbb{C}} = F$.*

Todistus. Suoraviivainen lasku. □

Lause 4.17. *Olkoon V $\mathbb{C}$ -vektoriavaruus ja $p: V \rightarrow \mathbb{R}$ seminormi. Olkoon edelleen $W \subset V$ aliavaruus ja $f: W \rightarrow \mathbb{C}$ lineaarikuvaus s.e. $|f(w)| \leq p(w)$ kaikilla $w \in W$. Tällöin on olemassa lineaarikuvaus $F: V \rightarrow \mathbb{C}$ s.e.*

(1) $|F(v)| \leq p(v)$ kaikilla $v \in V$, ja

(2) $F|_W = f$.

Todistus. Huomataan, että $\operatorname{Re}(f)$ on reaalinen funktionaali s.e. $f(w) \leq p(w)$ kaikilla $w \in W$. Täten Lauseen 4.8 nojalla sille löytyy $\mathbb{R}$ -lineaarinen jatko $F: V \rightarrow \mathbb{R}$ s.e. $F|_W = \operatorname{Re}(f)$ ja $F(v) \leq p(v)$ kaikilla $v \in V$. Nyt suora lasku osoittaa, että $F_{\mathbb{C}}$ on haluttu kuvaus. □

Kompleksinen Hahn-Banachin lause saadaan käyttämällä ylläolevaa lauseen 4.9 kompleksisen version todistuksessa.

5. L^p -AVARUUDET

Tässä kappaleessa käsitellään sekä tämän kurssin että koko funktionaalianalyysin eräs tärkeimmistä kuvausjoukosta, eli L_p -avaruudet.

Tehtävä 5.1. Palauta mieleesi, kuinka lasket funktion

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \in [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1] \\ 1, & \text{kun } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Lebesguen integraalin $\int_0^1 f$.

Jatkossa oletamme, ellei toisin sanota, että kaikki integraalit otetaan Lebesguen mielessä.

Tehtävä 5.2. Olkoon $M([0, 1], \mathbb{R})$ kaikkien Lebesgue-integroituvien kuvausten $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ kokoelma. Osoita, että kuvaus $N: M([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $N(f) = \int_0^1 |f|$ on vektoriavaruuden $M([0, 1], \mathbb{R})$ *seminormi*, mutta ei normi.

5.1. Tekijäavaruudet.

Määritelmä 5.1. Olkoon V vektoriavaruus ja $W \subset V$ sen vektoriavaruus. Aliavaruuden W *sivuluokkia* ovat joukot

$$W + v = \{w + v \in V \mid w \in W\},$$

missä $v \in V$. Huomaa, että “vektorit v_1 ja v_2 kuuluvat samaan aliavaruuden W sivuluokkaan” on ekvivalenssirelaatio.

Avaruuden V *tekijäavaruus aliavaruuden W suhteen*, V/W , on kaikkien sivuluokkien kokoelma

$$\{W + v \mid v \in V\}$$

varustettuna laskutoimituksilla

$$(W + v_1) + (W + v_2) = W + (v_1 + v_2), \quad \text{ja} \quad \lambda(W + v) = W + \lambda v.$$

Tehtävä 5.3. Osoita, että vektoriavaruuden aliavaruuden sivuluokat ovat aina erillisiä joukkoja, eli että jos kaksi sivuluokkaa leikkaavat niin ne ovat sama sivuluokka.

Tehtävä 5.4. Osoita, että relaatio “vektorit v_1 ja v_2 kuuluvat samaan aliavaruuden W sivuluokkaan” on ekvivalenssirelaatio, eli toteuttaa ehdot

- (1) xRx ,
- (2) xRy jos ja vain jos yRx , ja
- (3) jos xRy ja yRz , niin xRz .

Tehtävä 5.5. Osoita, että tekijäavaruuden laskutoimitukset ovat hyvinmääriteltyjä.

Tehtävissä 3.21–3.28 on itse asiassa lähestytty seuraavien lauseiden todistusta.

Lause 5.2. *Olkoon V vektoriavaruus ja $W \subset V$ sen vektorialiavaruus. Tällöin V/W on vektoriavaruus ja kuvaus $v \mapsto W + v$ on lineaarinen surjektio $V \rightarrow V/W$.*

Tehtävä 5.6. Todista lause 5.2.

Lause 5.3. *Olkoon V vektoriavaruus varustettuna seminormilla N . Merkitään $W = N^{-1}\{0\}$. Tällöin V/W on normiavaruus kun se varustetaan normilla $\|W + v\| = N(v)$.*

Tehtävä 5.7. Todista lause 5.3.

5.2. L^p -avaruudet. Tässä kappaleessa merkitään I :llä jotain reaaliakselin osaväliä. Tässä kappaleessa myöskin merkitään $1/\infty = 0$, mutta tämä tulee tulkita notaatiotekniikaksi eikä äärettömän vastaluvuksi.

Määritelmä 5.4. Olkoon $p \in [1, \infty)$. Merkitään

$$\|f\|_p := \left(\int_I |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ja

$$\|f\|_\infty := \operatorname{esssup}_{x \in I} |f(x)|.$$

Edelleen asetetaan

$$\mathcal{L}^p(I, \mathbb{K}) = \{f: I \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ on mitallinen ja } \|f\|_p < \infty\}$$

Tavoitteenamme tässä kappaleessa on osoittaa, että ylläoleva $\|\cdot\|_p$ on aina seminormi. Kolmioepäyhtälön todistamiseksi tarvitaan kuitenkin huomattavasti aputuloksia ja työtä.

Seuraava epäyhtälö on tekninen lemma jota tarvitaan lähinnä tämän kappaleen sisällä.

Lemma 5.5 (Youngin epäyhtälö). *Olkoot $a, b \in [0, \infty)$ ja $p, q \geq 0$ s.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tällöin*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Tehtävä 5.8. Todista Youngin epäyhtälö.

(Vihje: Osoita, että väite on ekvivalentti väitteen " $a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b$ kun $\alpha, \beta \in [0, 1]$, $\alpha + \beta = 1$ " kanssa ja käytä logaritmin konkaaviutta.)

Seuraava Hölderin epäyhtälö on erittäin tärkeä työkalu koko loppukurssin ajan.

Lause 5.6 (Hölderin epäyhtälö). Olkoot $f \in \mathcal{L}^p(I, \mathbb{K})$ ja $g \in \mathcal{L}^q(I, \mathbb{K})$ s.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tällöin kuvaukselle

$$fg: I \rightarrow \mathbb{K}, \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

pätee $fg \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ ja $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Tehtävä 5.9. Todista Hölderin epäyhtälö tilanteessa $p, q \in (1, \infty)$ soveltamalla Youngin epäyhtälöä lukiuihin $a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}$ ja $b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$ ja integroimalla saamasi epäyhtälön kumpaakin puolta muuttujan x suhteen.

Tehtävä 5.10. Todista Hölderin epäyhtälö tilanteessa $p = 1, q = \infty$.

Minkowskin epäyhtälö antaa meille viimein toivotun kolmioepäyhtälön.

Lause 5.7 (Minkowskin epäyhtälö). Olkoot $f, g \in \mathcal{L}^p(I, \mathbb{K})$. Tällöin $f + g \in \mathcal{L}^p(I, \mathbb{K})$ ja $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Tehtävä 5.11. Osoita, että kun $p \in (1, \infty)$ ja $f, g \in \mathcal{L}^p$, niin $f + g \in \mathcal{L}^p(I, \mathbb{K})$.

(Vihje: kun $|f(x)| \leq |g(x)|$, niin $|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p |g(x)|^p$.)

Tehtävä 5.12. Todista Minkowskin epäyhtälö tilanteessa $p, q \in (1, \infty)$ soveltamalla Hölderin epäyhtälöä ja huomiota

$$|f + g|^p \leq |f| |f + g|^{p-1} + |g| |f + g|^{p-1}.$$

Tehtävä 5.13. Todista Lause 5.7 tilanteessa $p = \infty$.

Tehtävä 5.14. Todista Lause 5.7 tilanteessa $p = 1$.

Tehtävä 5.15. Osoita, että $\mathcal{L}^p(I, \mathbb{K})$ on vektoriavaruus.

Tehtävä 5.16. Osoita, että $\|\cdot\|_p$ on avaruuden $\mathcal{L}^p(I, \mathbb{K})$ seminormi.

Tehtävä 5.17. Osoita, että

$$W = \{f \in \mathcal{L}^p(I, \mathbb{K}) \mid \|f\|_p = 0\}$$

on avaruuden $\mathcal{L}^p(I, \mathbb{K})$ vektorialiavaruus.

Määritelmä 5.8. Olkoon $p \in [1, \infty]$. Määritellään

$$L^p(I, \mathbb{K}) = \mathcal{L}^p(I, \mathbb{K})/W,$$

missä $W = \{f \in \mathcal{L}^p(I, \mathbb{K}) \mid \|f\|_p = 0\}$.

Huomautus 5.9. Huomaa, että avaruuden $L^p(I, \mathbb{K})$ alkiot eivät ole funktioita, vaan funktioiden ekvivalenssiluokkia. Käytämme tällä kurssilla

kuitenkin yleisesti käytössä olevaa terminologiaa, missä puhutaan “ L^p -funktioista” ja käytetään ilmaisuja muotoa: “Kuvaus $x \mapsto x^2$ on L^p -funktio yksikköväliillä.” Näissä tilanteissa aina kuitenkin on taustalla ajatus siitä, että kyseessä on oikeasti näiden funktioiden ekvivalenssiluokat.

Erityisen tärkeää on se, että meidän pitää olla hieman varovaisia sen suhteen, että millaisia väitteitä voimme kysyä tai esittää. Esimerkiksi väitteet “Mikä on tämän L^p -funktion arvo nollassa?” tai “Onko L^p -funktio aina jatkuva?” eivät tarkoita mitään, sillä L^p -funktioilla ei ole mitään tiettyä arvoa annetussa pisteessä; jokaisella funktiolla on L^p -ekvivalenssiluokassaan useita muita funktioita jotka poikkeavat alkuperäisestä funktiosta tuossa nimenomaisessa pisteessä. Tämän sijaan mahdollinen kysymys voisi olla, että “Onko tällä L^p -funktioilla jatkuvaa *edustajaa*, eli jatkuvaa ekvivalenssiluokansa alkioita?”

Tehtävä 5.18. Osoita, että funktio

$$g_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x = a, \\ 0, & \text{kun } x \neq a, \end{cases}$$

kuuluu avaruuteen $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ kaikilla $p \in [1, \infty]$.

Tehtävä 5.19. Osoita, että funktio

$$g_{\mathbb{Q}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{kun } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

kuuluu avaruuteen $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ kaikilla $p \in [1, \infty]$.

Huomautus 5.10. Jatkossa pidetään tunnettuna mittateoriasta juontuvaa faktaa, jonka mukaan kaksi kuvausta jotka ovat melkein kaikkialla samat kuuluvat aina samaan L^p -ekvivalenssiluokkaan. (Mikäli siis kuuluvat kyseiseen L^p -avaruuteen.)

Tehtävä 5.20. Osoita, että $(L^p(I, \mathbb{K}), \|\cdot\|_p)$ on normiavaruus kaikilla $p \in [1, \infty]$.

Esimerkki 5.11. Olkoon $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ kuvaus, joka määritellään seuraavasti. Otetaan yksikkövälin ratinoaalilukujen numerointi $\{q_1, q_2, \dots\}$ ja asetetaan

$$g_j: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_j = \begin{cases} \sqrt{|x - q_j|}^{-1}, & \text{kun } x \neq q_j \\ 0, & \text{kun } x = q_j. \end{cases}$$

Asetetaan edelleen $f(x) = \sum_j 2^{-j} g_j(x)$. Mihin L^p -avaruuksiin kuuluu kuvaus f ?

5.3. L^p -avaruuksien täydellisyys.

Lause 5.12. *Avaruus $L^p(I, \mathbb{K})$ on Banachin avaruus kaikilla $p \in [1, \infty]$.*

Todistus. Todistetaan luennolla kun $p < \infty$, $p = \infty$ on HT. $\square$

Esimerkki 5.13. Lause 5.12 tilanteessa $p < \infty$.

Tehtävä 5.21. Todista Lause 5.12 tilanteessa $p = \infty$.

5.4. Esimerkkejä L^p -kuvauksista.

Tehtävä 5.22. Määritä millä $t > 0$ kuvaus

$$f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^{-t}$$

kuuluu avaruuteen $L^p([1, \infty), \mathbb{R})$, missä $p \in [1, \infty)$.

Tehtävä 5.23. Määritä millä $t > 0$ kuvaus

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^{-t}, & \text{kun } x \neq 0 \\ 0 & \text{kun } x = 0 \end{cases}$$

kuuluu avaruuteen $L^p([0, 1], \mathbb{R})$, missä $p \in [1, \infty)$.

Tehtävä 5.24. Määritä millä $t > 0$ kuvaus

$$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^{-t}, & \text{kun } x \neq 0 \\ 0 & \text{kun } x = 0 \end{cases}$$

kuuluu avaruuteen $L^p([0, \infty), \mathbb{R})$, missä $p \in [1, \infty)$.

5.5. L^p -avaruuksien duaalit. Yllä olevissa lauseissa esiintyi usein lukupari (p, q) jolle pätee $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tässä tilanteessa lukua p kutsutaan usein luvun p *duaalieksponentiksi*, ja sitä merkitään p' . Tämä terminologia juontaa siitä, että avaruus $L^{p'}$ on avaruuden L^p duaali.

Lause 5.14. *Olko $p \in [1, \infty)$ ja $q \in (1, \infty]$ s.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tällöin kuvaus*

$$T: L^q(I, \mathbb{K}) \rightarrow (L^p(I, \mathbb{K}))', \quad (Tg)f = \int_I fg$$

on isometria. Kun $p = \infty$ ja $q = 1$, kuvaus on isometrinen upotus.

Todistus. Tehtävät 5.25 – 5.29 sekä esimerkki 5.15 kattavat kaiken pait-si kuvauksen surjektiivisuuden.

Kuvauksen surjektiivisuuden todistus ohitetaan, se on yllättävän raskas ja vaatii kurssivaatimusten ja -sisällön ulkopuolelle menevää mitta-teorian osaamista. Kts. esim [EW17, Proposition 7.36, s.230]. Käydään luennolla yleistä ideaa läpi.

Idean perusideat ovat seuraavat. (Tässä $\chi_A: I \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset I$ on *indikaattorikuvaus* joka saa arvon 1 joukossa A ja arvon 0 muualla. Edelleen

$\mathcal{M}(I) \subset \mathcal{P}(I)$ on joukon I kaikkien mitallisten osajoukkojen kokoelma.)

Olkoon $L \in (L^p(I, \mathbb{K}))'$. Muodostetaan kuvaus

$$v^+: \mathcal{M}(I) \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad v^+(B) = \sup\{L(\chi_A) \mid A \subset B\},$$

ja osoitetaan (kohtuullisella vaivalla), että v^+ on mitta joukossa I . (Jos $L = T(g)$ jollain g , niin $v^+(A) = \int_A g^+ d\mu$, missä $g^+ = \max(0, g)$ ja μ Lebesguen mitta.)

Suuremmalla vaivalla osoitetaan, että mitta v^+ on absoluuttisesti jatkuva Lebesguen mitan suhteen, jolloin voimme ottaa sen n.k. Radon-Nikodym -derivaatan Lebesguen mitan suhteen. Tämä derivaatta on kuvaus h s.e. $v^+(A) = \int_A h d\mu$. Tehdään koko roska uudestaan, mutta otetaan v^- joka on supremum yli arvojen $-L(\chi_A)$. Näin saadusta kahden eri mitan Radon-Nikodym -derivaatasta saadaan ulos funktio g s.e. $v^\pm(A) = \int_A g^\pm d\mu$.

Tämän jälkeen osoitetaan, että itse asiassa $g \in L^p$ ja $T(g) = L$, josta väite seuraa. $\square$

Tehtävä 5.25. Osoita, että Lauseen 5.14 kuvaus T on lineaarinen kuvaus.

Tehtävä 5.26. Lauseen 5.14 tilanteessa osoita Hölderin epäyhtälön avulla, että $|T(g)f| \leq \|g\|_q \|f\|_p$. Osoita tämän huomion avulla, että $\|T(g)\| \leq \|g\|_q$.

Osoitetaan seuraavaksi eri tilanteisiin rajoittumalla, ettei pelkästään $\|T(g)\| \leq \|g\|_q$ vaan peräti $\|T(g)\| = \|g\|_q$.

Tehtävä 5.27. Lauseen 5.14 tilanteessa, kun $p = \infty$ ja $q = 1$, osoita että $\|T(g)\| = \|g\|_q$.

(Vihje; määritä kullakin $g \in L^q, g \neq 0$, kuvaus $f_g = g/|g|$ ja laske $T(g)(f_g)$.

Tehtävä 5.28. Lauseen 5.14 tilanteessa, kun $p \in (0, \infty)$, osoita että $\|T(g)\| \leq \|g\|_q$.

(Vihje; määritä kullakin $g \in L^q, g \neq 0$, kuvaus

$$f_g = \frac{g}{|g|} \left(\frac{|g|}{\|g\|_q} \right)^{\frac{q}{p}}$$

ja laske $T(g)(f_g)$.)

Esimerkki 5.15. Lauseen 5.14 tilanteessa, kun $p = 1$ ja $q = \infty$, niin $\|T(g)\| \leq \|g\|_q$.

Tämän todistamiseksi, huomataan että kaikilla $\varepsilon > 0$ joukolle

$$A_\varepsilon := \{z \in I : |g(z)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\}$$

pätee $m(A) \in (0, \infty)$. Määritellään kuvaus

$$f_g^\varepsilon: I \rightarrow \mathbb{K}, \quad f_g^\varepsilon(x) = \frac{1}{m(A_\varepsilon)} \chi_{A_\varepsilon}(x) \frac{g(x)}{|g(x)|}.$$

Nyt yhtäältä

$$\begin{aligned}\|f_g^\varepsilon\|_1 &= \int_I |f_g^\varepsilon| \\ &= \int_I \left| \frac{1}{m(A_\varepsilon)} \chi_{A_\varepsilon}(x) \frac{g(x)}{|g(x)|} \right| dx \\ &= \frac{1}{m(A_\varepsilon)} \int_{A_\varepsilon} \frac{|g(x)|}{|g(x)|} dx = 1.\end{aligned}$$

Toisaalta

$$\begin{aligned}T(g)(f_g^\varepsilon) &= \int_I g f_g^\varepsilon \\ &= \frac{1}{m(A_\varepsilon)} \int_{A_\varepsilon} g(x) \frac{g(x)}{|g(x)|} dx \\ &\geq \frac{1}{m(A_\varepsilon)} \int_{A_\varepsilon} \|g\|_\infty - \varepsilon dx = \|g\|_\infty - \varepsilon.\end{aligned}$$

Täten

$$\|T(g)\| = \sup_{\|f\|_1=1} |T(g)(f)| \geq \|g\|_\infty,$$

kuten haluttiin.

Tehtävä 5.29. Edellisiä tehtäviä ja esimerkkiä käyttäen, osoita että tehtävän 5.14 kuvaus on *isometrinen upotus*, eli isometrinen kuvaus kuvajoukolleen.

6. ISOJA LAUSEITA

Tässä kappaleessa käydään läpi muutama tärkeä, lähes Hahn-Banachin veroinen tulos, joista on hyötyä monessa eri yhteydessä jatkossa.

Määritelmä 6.1. Normiavaruuden V osajoukko U on *avoin* mikäli kaikilla $v \in U$ on olemassa $r_v > 0$ s.e. $B_V(v, r_v) \subset U$.

Huomautus 6.2. Ekvivalentisti, joukko on avoin jos ja vain jos sen komplementti on suljettu, eli oma sulkeumansa.

Seuraava jossain määrin topologinen tulos sekä sen Korollaari 6.5 ovat tämän luvun työhevosiä. Kummatkin väitteet pätevät yleisemmin mille tahansa täydelliselle (pseudo)metriselle avaruudelle.

Lause 6.3 (Bairen kategorialause (eräs muotoiluista)). *Olkoon V Banachin avaruus ja $A_j \subset V$, $j \in \mathbb{N}$, kokoelma avoimia tiheitä joukkoja. Tällöin joukko $A = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j \subset V$ on tiheä.*

Todistus. Riittää näyttää, että mikä tahansa avaruuden V epätyhjä avoin joukko U leikkaa joukkoa A . Koska A_1 on tiheä, niin on olemassa $x_1 \in U \cap A_1$ ja koska kahden avoimen joukon leikkaus on avoin, löytyy säde $r_1 > 0$ s.e. $\overline{B}_V(x_1, r_1) \subset U \cap A_1$.

Oletetaan nyt, että olemme määritelleet pisteet $x_1, \dots, x_n$. Nyt koska A_{n+1} on tiheä, löytyy piste $x_{n+1} \in B(x_n, r_n) \cap A_{n+1}$, ja koska kahden avoimen joukon leikkaus on avoin, löytyy säde $r_{n+1} \in (0, \frac{1}{n})$ s.e. $\overline{B}_V(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B_V(x_n, r_n) \cap A_{n+1}$.

Täten saadaan rekursiivisesti määriteltä jono (x_n) , jolla erityisesti pätee, että

$$\{x_j \mid j \geq N\} \subset B_V(x_N, \frac{1}{N}).$$

Tästä seuraa, että kyseinen jono on Cauchyn jono ja siis suppenee avaruudessa V kohti jotakin pistettä x_0 . Koska valitsemamme kuulat olivat kaikki sisäkkäisiä, niin nyt $x_0 \in U$ ja $x_0 \in A_j$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$, joten erityisesti

$$x_0 \in U \cap \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j.$$

□

Esimerkki 6.4. Huomaa, että Bairen kategorialauseessa numeroituva indeksijoukko on välttämätön; joukot $\mathbb{R} \setminus \{x\}$, $x \in \mathbb{R}$ ovat avoimia tiheitä Banachin avaruuden $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ osajoukkoja, mutta niiden leikkaus on tyhjä.

Korollari 6.5 (Bairen kategorialause (eräs toinen muotoiluista)).
Olkoon V Banachin avaruus ja $B_j \subset V$, $j \in \mathbb{N}$, kokoelma suljettuja joukkoja s.e. $\cup_j B_j = V$. Tällöin on olemassa j_0 s.e. joukolla B_{j_0} on sisäpiste.

Tehtävä 6.1. Todista, että ylläoleva korollari seuraa Bairen lauseen ensimmäisestä muotoilusta.

(Vihje: joukolla on sisäpisteitä jos ja vain jos sen komplementti ei ole tiheä.)

Seuraava Banachin ja Steinhausin lause tunnetaan myös *tasaisen rajoituksen periaatteena*.

Lause 6.6 (Banachin ja Steinhausin lause). *Olkoon S jokin indeksijoukko (esim. $\mathbb{N}$ tai $\mathbb{R}$) ja $\{T_\alpha \mid \alpha \in S\}$ kokoelma rajoitettuja lineaarikuvauksia Banachin avaruudelta $(V, \|\cdot\|)$ normiavaruuteen (W, N) .*

Mikäli tällöin kaikilla $v \in V$ joukko $\{T_\alpha(v) \mid \alpha \in S\}$ on rajoitettu, niin on olemassa vakio $M \geq 1$ s.e. $\|T_\alpha\| \leq M$ kaikilla $\alpha \in S$.

Todistus. Seuraavat neljä tehtävää. □

Tehtävä 6.2. Lauseen 6.6 tilanteessa, osoita että joukot

$$E_n := \{v \in V \mid \sup_{\alpha \in S} N(T_\alpha(v)) \leq n\}$$

ovat suljettuja ja $\cup_n E_n = V$.

(Vihje: osoita, että $E_n = \bigcap_{\alpha} (N \circ T_\alpha)^{-1}[0, n]$.)

Tehtävä 6.3. Lauseen 6.6 tilanteessa, päätele että jollakin $N \in \mathbb{N}$ joukolla E_N on sisäpiste. Osoita, että tällöin itse asiassa $B_V(0, r_N) \subset E_N$ jollakin $r_N > 0$.

(Vihje: käytä joukkojen E_n symmetrisyyttä; $v \in E_n$ joss $-v \in E_n$.)

Tehtävä 6.4. Lauseen 6.6 tilanteessa, osoita että $\|T_\alpha\| \leq \frac{N}{r_N}$ kaikilla $\alpha \in S$.

Tehtävä 6.5. Osoita, että Lause 6.6 ei ole välttämättä totta mikäli V ei ole Banachin avaruus.

(Vihje: Reaalikertoimisten polynomien avaruus $P([0, 1], \mathbb{R})$ varustettuna sup-normilla ei ole täydellinen.)

Määritelmä 6.7. Olkoon (T_n) jono rajoitettuja lineaarikuvauksia $V \rightarrow W$, missä V ja W ovat normiavaruuksia.

Mikäli $\|T_n - T\| \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$, niin sanomme että kyseinen jono *suppenee tasaisesti kohti kuvausta T* .

Mikäli kaikilla $v \in V$ pätee, että $\|T_n(v) - T(v)\|_W \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$, niin sanomme että kyseinen jono *suppenee vahvasti kohti kuvausta T* .

Tehtävä 6.6. Osoita, että jos jono rajoitettuja lineaarikuvauksia suppenee tasaisesti, se suppenee myös vahvasti.

Esimerkki 6.8. Esimerkki jonosta joka suppenee vahvasti, mutta ei tasaisesti.

Lemma 6.9. *Olkoon V Banachin avaruus ja W normiavaruus. Mikäli jono rajoitettuja lineaarikuvauksia (T_n) suppenee vahvasti kohti kuvausta T , niin T on rajoitettu lineaarikuvaus.*

Tehtävä 6.7. Todista Lemma 6.9.

(Vihje: Osoita lineaarisuus suoraan, rajoittuneisuuteen käytä Banachin ja Steinhausin lausetta.)

6.1. Avoimen kuvauksen lause. Muistetaan, että homeomorfismi on bijektiivinen kuvaus jolle pätee, että sekä kuvaus että sen käänteiskuvaus ovat jatkuvia.

Määritelmä 6.10. Kuvaus $f: X \rightarrow Y$ kahden metrisen (tai topologisen) avaruuden välillä on *avoin kuvaus*, mikäli jokaisen avoimen joukon kuva on avoin.

Huomautus 6.11. Huomaa, että kuvaus on jatkuva jos ja vain jos jokaisen avoimen joukon alkukuva on avoin. Täten bijektiivinen kuvaus on avoin jos ja vain jos se käänteiskuvaus on jatkuva.

Edelleen muistetaan, että lineaarikuvaus on jatkuva jos ja vain jos se on rajoitettu. Täten erityisesti bijektiivisen lineaarikuvauksen L käänteiskuvaus on rajoitettu jos ja vain jos L on avoin.

Lause 6.12. *Olkoon $L: V \rightarrow W$ rajoitettu lineaarikuvaus kahden Banachin avaruuden välillä. Jos L on surjektio, niin se on avoin kuvaus.*

Todistus. Tehtävät 6.8 – 6.13. □

Tehtävä 6.8. Olkoon $T: V \rightarrow W$ rajoitettu surjektiivinen lineaarikuvaus, missä V on normiavaruus ja W Banachin avaruus. Tällöin on olemassa $r_0 > 0$ siten, että $B_W(0, r_0) \subset \overline{T(B_V(0, 1))}$.

(Vihje: Osoita ensin, että $W = \cup_n \overline{T(B_V(0, n))}$ ja käytä Bairen lausetta. Hyödynnä sitten joukon $\overline{T(B(0, R))}$ symmetrisyyttä ja konveksisuutta.)

Tehtävä 6.9. Lauseen 6.12 tilanteessa, osoita että riittää näyttää että 0 on joukon $T(B_V(0, 1))$ sisäpiste.⁶

Tehtävä 6.10. Lauseen 6.12 tilanteessa, näytä että kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta \in (0, \varepsilon)$ s.e. $B_W(0, \delta) \subset \overline{T(B_V(0, \varepsilon))}$.
(Vihje: Tehtävä 6.8.)

Tehtävä 6.11. Lauseen 6.12 tilanteessa, olkoon $\varepsilon_j > 0$ jono s.e. $\sum \varepsilon_j < 1$ ja δ_j jono joka saadaan soveltamalla edellistä tehtävää jonon ε_j alkioihin.

Olkoon $w \in B_W(0, \delta_1)$. Osoita, että tällöin on olemassa jono (v_j) , $v_j \in B_V(0, \varepsilon_j)$ s.e. $\|y - T(\sum_{j=1}^k x_j)\| < \delta_{k+1}$ kaikilla k .
(Vihje: Edellinen tehtävä.)

Tehtävä 6.12. Lauseen 6.12 tilanteessa, osoita että edellisen tehtävän jonoa (x_k) vastaava sarja suppenee.
(Vihje: Tehtävä 3.20.)

Tehtävä 6.13. Lauseen 6.12 tilanteessa, osoita että edellisen tehtävän raja-arvolle v_0 pätee $v_0 \in B(0, 1)$. Viimeistele nyt Lauseen 6.12 todistus.

Korollaari 6.13. *Olkoot V ja W Banachin avaruuksia ja $T: V \rightarrow W$ rajoitettu lineaarikuvaus. Jos T on bijektio, niin se on homeomorfismi.*

Tehtävä 6.14. Todista korollaari 6.13

Korollaari 6.14. *Olkoot $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ kaksi vektoriavaruuden V normia s.e. V on täydellinen kummankin normin suhteen. Mikäli on olemassa $M \geq 1$ s.e. $\|v\|_1 \leq M\|v\|_2$ kaikilla $v \in V$, niin normit $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ ovat ekvivalentit.*

Tehtävä 6.15. Todista korollaari 6.14.

Tehtävä 6.16. Todista korollaarin 6.13 avulla, että missä tahansa ääretönulotteisessa vektoriavaruudessa on normi, jonka suhteen avaruus ei ole täydellinen.

6.2. Suljetun kuvaajan lause.

Määritelmä 6.15. Kuvauksen $f: X \rightarrow Y$ kuvaaja eli graafi on joukko

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}.$$

⁶Muista, että piste x on joukon A sisäpiste mikäli on olemassa säde $r > 0$ s.e. $B(x, r) \subset A$.

Huomautus 6.16. Huomaa, että kahden normiavaruuden tulo on edelleen normiavaruus kun se varustetaan kordinaattikohtaisilla laskutoimituksilla ja esimerkiksi normilla $\|(v, w)\| = \|v\|_V + \|w\|_W$ – kts. Tehtävä 6.17.

Lause 6.17 (Suljetun kuvaajan lause). *Olkoon $L: V \rightarrow W$ lineaarikuvaus kahden Banachin avaruuden välillä. Jos $\Gamma(L)$ on suljettu, niin L on rajoitettu.*

Todistus. Tehtävät 6.17 – 6.20. □

Tehtävä 6.17. Osoita, että normiavaruuksien $(V, \|\cdot\|_V)$ ja $(W, \|\cdot\|_W)$ tuloavaruus $V \times W$ on normiavaruus kun se varustetaan normilla $\|(v, w)\| = \|v\|_V + \|w\|_W$.

Tehtävä 6.18. Osoita, että Banachin avaruuden suljettu aliavaruus on edelleen Banachin avaruus. Totea, että erityisesti Lauseen 6.17 oletuksilla $\Gamma(L)$ on Banachin avaruus.

Tehtävä 6.19. Lauseen 6.17 tilanteessa, osoita että kuvaus $p: \Gamma(L) \rightarrow V$, $p(v, L(v)) = v$, on rajoitettu lineaarikuvaus ja bijektio.

Tehtävä 6.20. Todista Lause 6.17.

(Vihje: Edellinen tehtävä ja avoimen kuvauksen lause. Osoita, että $\|v\| + \|T(v)\| \leq \|p^{-1}\| \|v\|$.)

6.3. Kiinnostavia seurauksia aiemmille lauseille.

Tehtävä 6.21. Olkoon $L: V \rightarrow V$ rajoitettu lineaarikuvaus, missä V on Banachin avaruus. Osoita, että mikäli $\|T\| < 1$, niin sarja $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ suppenee. (Tässä $T^0 = \text{id}_V$ ja $T^{n+1} = T^n \circ T$.)

Tehtävä 6.22. Osoita, että edellisen tehtävän tilanteessa sarjan raja-arvo on kuvauksen $\text{id}_V - T$ käänteiskuvaus ja

$$\|(\text{id}_V - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

Tehtävä 6.23. Olkoon $L: V \rightarrow W$ injektiivinen rajoitettu lineaarikuvaus kahden Banachin avaruuden välillä. Osoita, että jos $T(V)$ on suljettu aliavaruus, niin on olemassa $c > 0$ s.e. $\|L(v)\| \geq c\|v\|$ kaikilla $v \in V$,

(Vihje: Avoimen kuvauksen lause.)

Tehtävä 6.24. Olkoon $L: V \rightarrow W$ injektiivinen rajoitettu lineaarikuvaus kahden Banachin avaruuden välillä. Osoita, että jos jollain $c > 0$ pätee, että $\|L(v)\| \geq c\|v\|$ kaikilla $v \in V$, niin $T(V)$ on suljettu aliavaruus.

(Vihje: Tutki käänteiskuvausta $T(V) \rightarrow V$.)

7. L^p AVARUUDET OSA 2 – THE ELECTRIC BOOGALOO

Tämä on viimeinen kappale ennen kurssin ensimmäistä välikoetta. Valtavan tehtäväryöpyyn sijasta tarjolla on harjoitustentti – viisi tehtävää jotka kaikki palautetaan kirjallisesti ennen ensimmäistä välikoetta. Harjoitustentti löytyy sekä prujun alikappaleena että kurssin kotisivulta.

Tässä kappaleessa Käydään läpi hieman lisää L^p -avaruuksien teoriaa sekä joitakin muita tähänastisiin käsitteisiin liittyviä aiheita. Tarkoitus on sekä täyttää pieniä reikiä teoriassa sekä tämän varjolla kerrata tähän asti käytyä. Tässä luvussa olevia todistuksia tarvittaessa laajennetaan luennon jälkeen toiveiden perusteella.

7.1. Toivottuja esimerkkejä.

Esimerkki 7.1. Esimerkki kuvauksesta joka on avoin muttei jatkuva. Otetaan $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 2\pi)$, $f(z) = \arg(z)$.

Esimerkki 7.2. Esimerkki jonosta operaattoreita joka suppenee vahvasti vaan ei tasaisesti.

$$T_n: \ell^1(\mathbb{R}) \rightarrow \ell^1(\mathbb{R}), \quad T_n(x_1, x_2, x_3, \dots) = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1 \text{ kpl}}, x_n, x_{n+1}, \dots).$$

7.2. **Lisää L^p -avaruuksista.** Muutamia faktoja L^p -avaruuksista, joita ei aiemmin ehditty tai muistetu käydä läpi.

Lause 7.3. *Avaruus $L^p(I, \mathbb{K})$ on separoituva kaikilla $p \in [1, \infty)$.*

Todistus. Todistus nojaa siihen että yksinkertaisten funktioiden joukko on tiheä avaruudessa L^p , ja yksinkertaisia funktioita voidaan approksimoida 'rationaalisilla yksinkertaisilla funktioilla'. $\square$

Huomautus 7.4. Avaruus $L^\infty(I, \mathbb{K})$ ei ole separoituva; tämä seuraa kuitenkin aiemmin siitä, että voidaan tutkia funktioita jotka saavat arvoja 1 ja 0. Tarkemmin sanottuna, esimerkiksi tilanteessa $I = [0, 1]$ kuvaukset muotoa

$$f_s: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_s(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \in \{0, 1\} \\ s(n), & \text{kun } x \in \{n^{-1} \mid n \in \mathbb{N}\} \\ \text{lineaarinen} & \text{muulloin,} \end{cases}$$

missä $s: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ on mikä tahansa jono nollia ja ykkösiä, muodostavat ylinumeroituvan joukon funktioita avaruudessa $L^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ s.e. $\|f_s - f_{s'}\| \geq \frac{1}{2}$ kaikilla $s \neq s'$.

Lemma 7.5. Olkoon $f \in L^p(I, \mathbb{K})$ kaikilla $p \in [1, \infty]$. Tällöin

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Todistus. Todistetaan tilanteessa, missä I on rajoitettu, yleinen tilanne seuraa tutkimalla rajoittumia väleille $[-j, j]$, kun $j \rightarrow \infty$.

Yhtäältä kaikilla $\varepsilon \in (0, \|f\|_\infty)$ asetetaan

$$S_\varepsilon := \{x \in I : |f(x)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon\}.$$

Nyt

$$\|f\|_p \geq \left(\int_{S_\varepsilon} (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p \right)^{\frac{1}{p}} = (\|f\|_\infty - \varepsilon) m(S_\varepsilon)^{\frac{1}{p}}.$$

Täten $\liminf_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$.

Toisaalta aina

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int \|f\|_\infty^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty.$$

□

Lause 7.6. Normiavuuden duaali on aina täydellinen.

Esimerkki 7.7. Avaruuden L^∞ duaalista. Aiemmin huomattiin, että $(L^p)' = L^{p'}$, ja $(L^1)' = L^\infty$. Entä $(L^\infty)'$? Lyhyt vastaus on, että avaruuden $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ duaali on kaikkien niiden äärellisesti additiivisten äärellisten merkkimittojen kokoelma, jotka on määritelty kokoelmassa Σ ja ovat absoluuttisesti jatkuvia mitan μ suhteen. Näillä on luonnollinen vektoriavaruusrakenne, ja ne voidaan varustaa normilla nimeltä totaaliavariaatio. Kts. lisää esim. [DS88, Theorem IV.8.16, s. 296]

7.3. ℓ^p -avaruuksista. Funktioavaruuksien L^p ohella tärkeän kokoelman vektoriavaruuksia muodostavat ℓ^p -avaruudet. (Lue: "pikku-äl pee".)

Määritelmä 7.8. Kun $p \in [1, \infty)$, merkitään

$$\ell^p(\mathbb{K}) := \{(x_n)_{n=1}^\infty \mid x_n \in \mathbb{K}, \sum_{j=1}^\infty |x_j|^p < \infty\},$$

sekä

$$\ell^\infty(\mathbb{K}) := \{(x_n)_{n=1}^\infty \mid x_n \in \mathbb{K}, \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j| < \infty\}.$$

Edelleen määritellään

$$\|(x_n)\|_p := \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

kun $(x_n) \in \ell^p$ ja

$$\|(x_n)\|_\infty := \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j|,$$

kun $(x_n) \in \ell^\infty$.

Huomautus 7.9. Huomaa, että mikäli olisimme määritelleet $L^p(I, \mathbb{K})$ -avaruudet yleisemmin tilanteessa, jossa I voisi olla mikä tahansa järjestyksellinen mitta-avaruus, niin ℓ^p -avaruuksien teoria tulisi “ilmaiseksi” tutkimalla mitta-avaruutta $(\mathbb{N}, \mu)$, missä μ on lukumäärämitta $\mu(A) = \#A$.

Lause 7.10. *Kaikilla $p \in [1, \infty]$ avaruus $\ell^p(\mathbb{K})$ on Banachin avaruus.*

Todistus. On suoraviivaista tarkistaa, että $\ell^p(\mathbb{K})$ on vektoriavaruus. Kun $p = 1, \infty$, on $\|\cdot\|_p$ helppo nähdä normiksi. Yleisessä tilanteessa kopioidaan Hölderin- ja Minkowskin epäyhtälöiden todistukset korvaten integraalit summamerkeillä.

Täydellisyys todistetaan kuten L^p -tapauksessa; huomataan että Cauchy-jono ℓ^p -jonoja on sellainen, että kussakin kordinaatissa on reaalinen Cauchy-jono, joka suppenee reaalilukujen täydellisyyden nojalla. Suora lasku osoittaa, että alkuperäinen jono suppenee tätä pisteittäistä rajaa kohti $\|\cdot\|_p$ -normin suhteen. $\square$

Lause 7.11. *Kaikilla $p \in [1, \infty)$ avaruus $\ell^p(\mathbb{K})$ on separoituva Banachin avaruus.*

Todistus. Jonot muotoa

$$\{(q_n) \mid q_j \in \mathbb{Q}, q_j \neq 0 \text{ vain äärellisen monella indeksillä } j\}$$

muodostavat numeroituvan osajoukon avaruudessa ℓ^p , ja ovat siellä myös tiheässä. $\square$

Lause 7.12. *Kaikilla $p, q \in [1, \infty]$ joilla $p^{-1} + q^{-1} = 1$ operaattori*

$$T: \ell^p(\mathbb{K}) \rightarrow (\ell^q(\mathbb{K}))', \quad (T(x_n))(y_n) = \sum_j x_n y_n$$

on isometrinen upotus. Kun $p \in (1, \infty)$, niin kuvaus T on isometria.

Todistus. Kuten Lauseen 5.14 todistus, mutta surjektiivisuus on nyt suoraviivaisempi.

⁷Esim. Borel, Radon, σ -äärellinen, tjsp.

Olkoon $L \in (\ell^q(\mathbb{K}))'$. Muodostetaan kaikilla $j \in \mathbb{N}$ jono $(e_n^j)_{n=1}^\infty$ asettamalla

$$e_n^j = \begin{cases} 1, & \text{kun } n = j, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Määritellään jono (y_n) asettamalla $y_j = L((e_n^j)_{n=1}^\infty)$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Nyt suora lasku osoittaa, että $L = T(y_j)$. $\square$

7.4. Biduaali ja refleksiiviset avaruudet.

Määritelmä 7.13. Olkoon V normiavaruus. Sen *biduaali* on $(V')' =: V''$, eli sen normin duaali.

Lause 7.14. *Kuvaus*

$$T: V \rightarrow V'', \quad (T(v))(f) = f(v)$$

on rajoitettu lineaarikuvaus ja isometrinen upotus.

Määritelmä 7.15. Normiavaruus V on *refleksiivinen*, mikäli kanoninen upotus

$$T: V \rightarrow V'', \quad (T(v))(f) = f(v)$$

on isometria.^a

^aTässä oli aikaisemmin virhe; sillä väitettiin että refleksiivisyyteen riittää olla isometrinen biduaalinsa kanssa *jonkin* isometrian suhteen. Tämä ei ole totta, refleksiivisyyden määritelmä on ylläoleva asia, eivätkä eri määritelmät ole yhtäpitäviä. Kts. esim. Jamesin avaruus https://en.wikipedia.org/wiki/James%27_space

Huomautus 7.16. Lauseen 5.14 nojalla jokainen L^p -avaruus, $p \in (1, \infty)$ on refleksiivinen.

7.5. Muita juttuja.

Määritelmä 7.17. Olkoon V vektoriavaruus. Osajoukko $A \subset V$ on *konvekksi*, mikäli kaikilla $v, w \in A$ ja kaikilla $\lambda \in (0, 1)$ $(1 - \lambda)v + \lambda w \in A$.

Edelleen joukko on *aidosti konvekksi* mikäli se on konvekksi ja kaikilla $\lambda \in (0, 1)$ $(1 - \lambda)v + \lambda w$ on joukon A sisäpiste.

Esimerkki 7.18. Esimerkkejä konvekseista joukoista;

- (1) Yksiöt $\{v\} \subset V$.
- (2) Kaikki aliavaruudet, erityisesti koko avaruus.
- (3) Suljettu ja avoin kuula.
- (4) Konveksin joukon kuva lineaarikuvauksen suhteen.
- (5) Konveksin joukon alkukuva lineaarikuvauksen suhteen.

Tehtävä 7.1 (Invariant subspace problem.). Olkoon V kompleksinen Banachin avaruus ja $T: V \rightarrow V$ rajoitettu lineaarikuvaus. Onko tällöin aina olemassa suljettu aliavaruus $W \subset V$ s.e. $W \neq \{0\}$ ja $TW = W$.

(Vihje: “Hankala.” Kts. esim. https://en.wikipedia.org/wiki/Invariant_subspace_problem.)

HARJOITUSTENTTI ENSIMMÄISEEN VÄLIKOEKEESEEN

Kukin seuraavasta viidestä tehtävästä on kuuden pisteen arvoinen.
Koeaikaa on neljä tuntia.

- (1) Olkoon $C^1([0, 1], \mathbb{R})$ kaikkien jatkuvasti derivoituvien funktioiden $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ muodostama vektoriavaruus. Osoita, että normit $\|f\|_{1,\infty} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ ja $\|f\|_\infty$ eivät ole ekvivalentteja normeja.

- (2) Osoita, että kuvaus

$$L: C^0([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow C^0([0, 1], \mathbb{R}), \quad L(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$$

on rajoitettu lineaarikuvaus kun sekä lähtö että maali varustetaan normilla $\|\cdot\|_\infty$.

Onko kuvaus L injektio tai surjektio?

- (3) Osoita, että kaikkien polynomien $p: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ avaruus $P([0, 1], \mathbb{R})$ varustettuna sup-normilla $\|\cdot\|_\infty$

- (a) on separoituva, mutta
(b) ei täydellinen normiavaruus.

- (4) Olkoon $L: V \rightarrow W$ injektiivinen rajoitettu lineaarikuvaus kahden Banachin avaruuden välillä. Osoita, että jos jollain $c > 0$ pätee, että $\|L(v)\| \geq c\|v\|$ kaikilla $v \in V$, niin $T(V)$ on suljettu aliavaruus.

- (5) Määritellään kuvaus

$$T: L^1([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow (L^\infty([0, 1], \mathbb{R}))', \quad (Tg)f = \int_I fg.$$

- (a) Osoita, että T on hyvinmääritelty lineaarikuvaus.
(b) Osoita, että T rajoitettu lineaarikuvaus.
(c) Osoita, että kuvaukselle T pätee $\|T(v)\| = \|v\|$ kaikilla $v \in L^1$.

8. HILBERTIN AVARUUDET

Tähän mennessä on tutkittu vektoriavaruuksia sekä näiden aliluokkana normiavaruuksia. Tässä kappaleessa mennään vielä askel eteenpäin ja varustetaan vektoriavaruus *sisätulolla*.

Kuten äärellisulotteisessa tilanteessa, sisätulo antaa tietoa kahden vektorin keskimääräisestä suhteesta. Se sisältää pituusdatan lisäksi tietoa myös vektorien välisestä 'kulmasta', mikäli tätä on ääretönulotteisessa tapauksessa edes järkevää määritellä.

8.1. Sisätulo.

Määritelmä 8.1. Olkoon V $\mathbb{K}$ -vektoriavaruus. *Sisätulo* avaruudessa V on kuvaus $S: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$, jolle pätee

(S1) $S(v, w) = \overline{S(w, v)}$ kaikilla $v, w \in V$.

Tässä $\bar{z}$ on kompleksiluvun $z = x + iy$ konjugaatti $x - iy$. Erityisesti mikäli $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, niin ehto vaatii vain että $S(v, w) = S(w, v)$.

(S2) $S(\lambda v_1 + v_2, w) = \lambda S(v_1, w) + S(v_2, w)$ kaikilla $v_1, v_2, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

(S3) $S(v, v) \geq 0$ kaikilla $v \in V$. (Erityisesti siis kompleksisella sisätulolla $S(v, v) = x + iy$ s.e. $x \geq 0$ ja $y = 0$.)

Merkitsemme usein vektorien v ja w sisätuloa $\langle v, w \rangle := S(v, w)$. (Notaatioita $(v|w)$ ja $\langle v|w \rangle$ näkee myös joskus.)

Vektoriavaruutta, joka on varustettu sisätulolla, kutsutaan *sisätuloavaruudeksi*.

Tehtävä 8.1. Osoita, että $S(f, g) = \int_I fg$ on sisätulo avaruudessa $C^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$. Laske funktioiden $\sin$ ja $\cos$ sisätulo.

Tehtävä 8.2. Osoita, että $S(f, g) = \int_I fg$ on sisätulo avaruudessa $L^2(I, \mathbb{R})$.

Tehtävä 8.3. Osoita, että $S(f, g) = \int_I fg$ ei ole sisätulo avaruudessa $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Tehtävä 8.4. Osoita, että $\langle (x_n), (y_n) \rangle = \sum_j x_j y_j$ on sisätulo avaruudessa $\ell^2(\mathbb{R})$.

Lemma 8.2 (Cauchyn epäyhtälö). *Sisätuloavaruudessa pätee*

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

Tehtävä 8.5. Todista Lemma 8.2.

(Vihje: Kolmioepäyhtälöä varten tutki termiä $\langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle$ ja purkamisen jälkeen aseta $\lambda = -\langle x, y \rangle / \langle y, y \rangle$.)

Lause 8.3. Olkoon $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sisätuloavaruus. Tällöin

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

on normi.

Tehtävä 8.6. Todista Lause 8.3.

(Vihje: Cauchyn ey; Lemma 8.2.)

Huomautus 8.4. Jatkossa oletamme, ellei toisin sanota, että sisätuloavaruus on aina varustettu Lauseen 8.3 antamalla normilla.

Tehtävä 8.7. Olkoon V sisätuloavaruus. Osoita, että kaikilla $v_0 \in V$ kuvaukset $v \mapsto \langle v, v_0 \rangle$ ja $w \mapsto \langle v_0, w \rangle$ ovat jatkuvia.

Tehtävä 8.8. Olkoon V sisätuloavaruus. Varustetaan vektoriavaruus $V \times V$ normilla $\|(v, w)\| = \|v\|_V + \|w\|_V$. Osoita, että sisätulo on jatkuva kuvaus $V \times V \rightarrow \mathbb{K}$.

Lemma 8.5. Olkoon H sisätuloavaruus. Tällöin kaikilla $v_0 \in H$, funktionaali $v \mapsto \langle v, v_0 \rangle$ on rajoitettu lineaarikuvaus.

Tehtävä 8.9. Todista Lemma 8.5.

8.2. Täydelliset sisätuloavaruudet.

Määritelmä 8.6. Hilbertin avaruus on täydellinen sisätuloavaruus.

Tehtävä 8.10. Osoita, että $L^2(I, \mathbb{K})$ on Hilbertin avaruus.

Lause 8.7. Olkoon $(V, \|\cdot\|)$ normiavaruus s.e.

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

kaikilla $x, y \in V$. Tällöin

$$S: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad S(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

on sisätulo ja $\|\cdot\|_S = \|\cdot\|$.

Todistus. Tehtävät 8.11–8.16. □

Tehtävä 8.11. Lauseen 8.7 tilanteessa, osoita että $S(v, w) = S(w, v)$ ja $S(v, v) > 0$ kaikilla $v, w \in V$.

Tehtävä 8.12. Lauseen 8.7 tilanteessa, osoita että $\sqrt{S(v, v)} = \|v\|$ kaikilla $v \in V$.

Tehtävä 8.13. Lauseen 8.7 tilanteessa, todista että $S(v_1 + v_2, w) = S(v_1, w) + S(v_2, w)$ kaikilla $v_1, v_2, w \in V$.

Tehtävä 8.14. Lauseen 8.7 tilanteessa, todista että $S(cv, w) = cS(v, w)$ kaikilla $v, w \in V$, $c \in \mathbb{Q}$.

(Vihje: Osoita ensin arvoille $-1, 1$ ja sitten induktiolla kaikille $c \in \mathbb{Z}$. Osoita sitten, että jos väite pätee arvolle c , niin se pätee arvolle $\frac{1}{c}$. Osoita lopuksi, että jos väite pätee arvoille c_1 ja c_2 , niin se pätee myös arvolle c_1c_2 .

Tehtävä 8.15. Lauseen 8.7 tilanteessa, todista että $S(cv, w) = cS(v, w)$ kaikilla $v, w \in V$, $c \in \mathbb{R}$.

(Vihje: Edellinen kohta ja jatkuvuus.)

Tehtävä 8.16. Todista Lause 8.7.

Huomautus 8.8. Lauseen 8.7 tilanteessa myös

$$S_{\mathbb{C}}(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) + \frac{i}{4}(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2)$$

on sisätulo ja $\|\cdot\|_{S_{\mathbb{C}}} = \|\cdot\|$.

Huomautus 8.9. Jos S ja $\hat{S}$ ovat kaksi reaalista sisätuloa vektoriavaroudessa V ja $\|v\|_S = \|v\|_{\hat{S}}$ kaikilla $v \in V$, niin $S = \hat{S}$. Seuraa huomaamalla, että nyt $S(v, v) = \hat{S}(v, v)$ kaikilla v , joten $S(x + y, x + y) = \hat{S}(x + y, x + y)$ kaikilla $x, y \in V$. Laskemalla termit auki, saadaan että $S(x, y) = \hat{S}(x, y)$.

Lause 8.10. Olkoon H hilbertin avaruus ja asetetaan

$$T: H \rightarrow H' \quad (T(v))(w) = \langle w, v \rangle.$$

- (1) Kun $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, niin T on lineaarinen isometrinen upotus ja $\|T\| = 1$.
- (2) Kun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, niin T on konjugaattilineaarinen^a isometrinen upotus.

^aKäydään luennolla.

Tehtävä 8.17. Todista Lauseen 8.10 tapaus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

8.3. Kohtisuoruus sisätuloavaruudessa.

Määritelmä 8.11. Sisätuloavaruuden V vektorit v ja w ovat *kohtisuorassa eli ortogonaalit* mikäli $\langle v, w \rangle = 0$. Tätä merkitään $v \perp w$.

Tehtävä 8.18. Olkoon V sisätuloavaruus ja $K \subset V$ joukko jolle pätee $v \perp w$ kaikilla $v, w \in K$, $v \neq w$. Osoita, että joukko K on lineaarisesti riippumaton.

Lemma 8.12. Olkoon V sisätuloavaruus. Tällöin kaikilla $v, w \in V$ pätee

(1) Polaarikaavat:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\langle x, y \rangle &= \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \\ \operatorname{Im}\langle x, y \rangle &= \frac{1}{4}(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2)\end{aligned}$$

(2) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (suunnikassääntö) ja
(3) Jos $x \perp y$, niin $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. (Pythagoraan lause)

Tehtävä 8.19. Todista Lemman 8.12 polaarikaavat.

Tehtävä 8.20. Todista Lemman 8.12 suunnikassääntö.

Tehtävä 8.21. Todista Lemman 8.12 Pythagoraan lause.

Esimerkki 8.13. Geometrisen Cauchy. Olkoon $v, u \in H$. Asetetaan

$$v = \underbrace{\frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle}}_{=:a} u + \underbrace{v - \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u}_{=:b},$$

jolloin suoralla laskulla $a \perp b$, ja siten Pythagoran epäyhtälöllä

$$\|v\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 \geq \|a\|^2 = \left\| \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u \right\|^2 = \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\|u\|^2}.$$

Tästä seuraa Cauchyn epäyhtälö.

Tehtävä 8.22. Osoita, että $L^1([0, 1], \mathbb{R})$ ei ole sisätuloavaruus.

(Vihje: Osoita että suunnikassääntö ei päde funktioille $f(x) = \chi_{[0, \frac{1}{2}]}(x)$ ja $g(x) = \chi_{[\frac{1}{2}, 1]}(x)$.)

Määritelmä 8.14. Olkoon V sisätuloavaruus ja $A \subset V$. Joukon A ortogonaalikomponentti eli kohtisuora komplementti on joukko

$$A^\perp := \{v \in V \mid \langle v, a \rangle = 0 \text{ kaikilla } a \in A\}$$

Tehtävä 8.23. Olkoon $A \subset V$ sisätuloavaruuden epätyhjä osajoukko. Osoita, että $A^\perp$ on aliavaruus.

Tehtävä 8.24. Olkoon $A \subset V$ sisätuloavaruuden epätyhjä osajoukko. Osoita, että $A^\perp$ on suljettu aliavaruus.

Tehtävä 8.25. Olkoon $W \subset V$ sisätuloavaruuden V aliavaruus. Osoita, että $U^\perp = (\overline{U})^\perp$.

Tehtävä 8.26. Olkoon $A \subset V$ sisätuloavaruuden V osajoukko. Osoita, että $A \subset (A^\perp)^\perp$.

Tehtävä 8.27. Olkoon $B \subset V$ sisätuloavaruuden V osajoukko. Osoita, että $B \cap B^\top \subset \{0\}$.

Tehtävä 8.28. Olkoon V sisätuloavaruus. Osoita, että $\{0\}^\perp = V$ ja $V^\perp = \{0\}$.

9. HILBERTIN AVARUUKSIA 2

Tässä kappaleessa jatketaan Hilbertin avaruuksien ominaisuuksien tutkimista. Todistetaan alkuun hieman hyödyllisiä apuhuomioita. Muista, että vektoriavarouden V osajoukko $A \subset V$ on *konvekksi*, mikäli kaikilla $v, w \in A$ ja kaikilla $\lambda \in (0, 1)$ $(1 - \lambda)v + \lambda w \in A$, ja *aidosti konvekksi* mikäli se on konvekksi ja kaikilla $\lambda \in (0, 1)$ $(1 - \lambda)v + \lambda w$ on joukon A sisäpiste.

Tehtävä 9.1. Osoita, että sisätuloavaroudessa $\langle x, y \rangle^2 = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$ jos ja vain jos $x \in \langle y \rangle$.

(Vihje: Tehtävän 8.5 todistus.)

Tehtävä 9.2. Osoita, että sisätuloavaroudessa $\|x + y\| < \|x\| + \|y\|$ jos $x \notin \langle y \rangle$.

(Vihje: Edellinen tehtävä.)

Tehtävä 9.3. Osoita, että sisätuloavarouden avoin ja suljettu kuula ovat aidosti konvekseja.

Tehtävä 9.4. Osoita, että sisätuloavarouden V aliavaruus W on aidosti konvekksi jos ja vain jos $W = V$.

Tehtävä 9.5. Osoita, että

$$\{f \in C^0([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(1) = 1\}$$

on normiavarouden $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ suljettu konvekksi osajoukko.

Huomaa, että se sisältää äärettömän monta normin minimoivaa alkion. Pohdi, montako normin minimoivaa alkion voi tason konvekssi suljettu osajoukko enintään sisältää.

Tehtävä 9.6. Osoita, että

$$\left\{f \in C^0([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0, \int_0^1 f = 1\right\}$$

on normiavarouden $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ suljettu konvekksi osajoukko.

Huomaa, ettei se sisällä yhtään normin minimoivaa alkion. Pohdi, montako normin minimoivaa alkion pitää tason konveksin suljetun osajoukon vähintään sisältää.

Tehtävä 9.7. Osoita, että $C^0([0, 1], \mathbb{R}) \subset L^2([0, 1], \mathbb{R})$ on aliavaruus, mutta ei suljettu aliavaruus (eikä siten Hilbertin avaruus) kun kummatkin avaruudet varustetaan normilla $\|\cdot\|_2$.

Tehtävä 9.8. Osoita, että $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ei ole sisätuloavaruus.

Tehtävä 9.9. Olkoon H Hilbertin avaruus ja (v_n) sen jono. Osoita, että $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v_0$ jos ja vain jos $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\| = \|v_0\|$ ja $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle v_n, v_0 \rangle = \langle v_0, v_0 \rangle$.

Tehtävä 9.10. Anna esimerkki Hilbertin avaruudesta H ja sen jonosta (v_n) s.e. kaikilla $w \in H$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle v_n, w \rangle = \langle 0, w \rangle$, mutta (v_n) ei suppene kohti nollavektoria.

9.1. Lähimmän pisteen kuvaus. Pohdi seuraavan lauseen yhteyttä tehtävien 9.5 ja 9.6 tuloksiin.

Lause 9.1. *Olkoon H Hilbertin avaruus ja $K \subset H$ suljettu ja konvekksi osajoukko. Tällöin kaikilla $h \in H$ on olemassa yksikäsitteinen $h_K \in K$ s.e.*

$$\|h - h_K\| = d(h, K) := \inf_{k \in K} \|h - k\|.$$

Todistus. Tehtävät 9.11–9.15. □

Tehtävä 9.11. Lauseen 9.1 tilanteessa, osoita että riittää todistaa väite tapauksessa $h = 0$.

Tehtävä 9.12. Lauseen 9.1 tilanteessa, muodosta jono (k_j) , $k_j \in K$ s.e. $\|k_j\| \rightarrow d(0, K)$.

Osoita, että $\|\frac{1}{2}(k_n + k_m)\| \geq d(0, K)$ kaikilla $n, m \in \mathbb{N}$.
(Vihje: joukon K konveksisuus.)

Tehtävä 9.13. Osoita, että edellisen tehtävän jono on Cauchy.

(Vihje: sovelta suunnikkasääntöä ilmaisuun $\|k_n - k_m\|^2$.)

Tehtävä 9.14. Osoita, että edellisen tehtävän jono suppenee ja osoita että sen raja-arvolle k_h pätee $d(0, k_h) = d(0, K)$.

Tehtävä 9.15. Lauseen 9.1 tilanteessa, osoita että h_K on yksikäsitteinen.

(Vihje: Suljettu kuula $\overline{B}(0, \|k_h\|)$ on aidosti konvekksi.)

Määritelmä 9.2. Olkoon H Hilbertin avaruus ja K sen suljettu konvekksi osajoukko. Tällöin asetetaan

$$P_K: H \rightarrow K, \quad P_K(h) = h_K,$$

missä h_K on Lauseen 9.1 antama piste.

Huomautus 9.3. Määritelmässä 9.2 on Lauseen 9.1 nojalla hyvinmääritelty, ja kutsumme sitä jatkossa *lähimmän pisteen kuvaukseksi*.

Huomaa, että lähimmän pisteen kuvaus ei ole (yleensä) lineaarinen.

Esimerkki 9.4. Kuvaus P_K kun $K = \overline{B}(x_0, r)$.

Tehtävä 9.16. Olkoon H Hilbertin avaruus ja K sen suljettu konvekksi osajoukko. Osoita, että lähimmän pisteen kuvaukselle pätee

- (1) $P_K(x) = x$ kaikilla $x \in K$, ja
- (2) $P_K(P_K(x)) = P_K(x)$

Huomautus 9.5. Edellisen tehtävän nojalla kuvausta P_K voi hyvällä omallatunnolla kutsua (yleistetyksi) projektiksi.

Lemma 9.6. *Olkoon H Hilbertin avaruus ja $K \subset H$ sen suljettu konvekksi osajoukko. Olkoot edelleen $h \in H$ ja $k \in K$. Tällöin*

$$\|h - k\| = d(h, K) \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\langle h - k, z - k \rangle) \leq 0 \text{ kaikilla } z \in K.$$

Todistus. Tehtävät 9.17–9.19. □

Tehtävä 9.17. Lemman 9.6 tilanteessa, osoita että mikäli $\|h - k\| = d(h, K)$ ja $z \in K$, $t \in (0, 1)$, niin

$$\operatorname{Re}(\langle h - k, z - k \rangle) \leq \frac{t}{2} \|z - k\|^2.$$

(Vihje: K on konvekksi, joten $k + t(z - k) \in K$. Osoita, että $\|h - k\|^2 \leq \|h - k\|^2 - 2t \operatorname{Re}(\langle h - k, z - k \rangle) + t^2 \|z - k\|^2$.)

Tehtävä 9.18. Lemman 9.6 tilanteessa, mikäli $\operatorname{Re}(\langle h - k, z - k \rangle) \leq 0$ kaikilla $z \in K$, niin osoita että $\|h - z\| \geq \|h - k\|$.

(Vihje: Osoita, että $\|h - z\|^2 = \|h - k\|^2 - 2 \operatorname{Re}(\langle h - k, z - k \rangle) + \|z - k\|^2$.)

Tehtävä 9.19. Todista Lemma 9.6.

Lause 9.7. *Olkoon H Hilbertin avaruus ja $K \subset H$ sen suljettu konvekksi osajoukko. Tällöin lähimmän pisteen kuvaus P_K on 1-Lipschitz, eli*

$$\|P_K(v) - P_K(w)\| \leq \|v - w\|$$

kaikilla $v, w \in H$.

Todistus. Tehtävä 9.20. □

Tehtävä 9.20. Todista Lause 9.7.

Tehtävä 9.21. Olkoon U Hilbertin avaruuden H suljettu aliavaruus. Osoita, että tällöin $\ker(P_U) = U^\perp$ ja $\operatorname{id} - P_U = P_{U^\perp}$.

Tehtävä 9.22. Olkoon U Hilbertin avaruuden H suljettu aliavaruus. Osoita, että $\langle P_U(v), w \rangle = \langle v, P_U(w) \rangle$ kaikilla $v, w \in H$.

Tehtävä 9.23. Olkoon H sisätuloavaruus ja $P: H \rightarrow H$ rajoitettu lineaarikuvaus s.e. $P \circ P = P$ ja $\langle P(v), w \rangle = \langle v, P(w) \rangle$ kaikilla $v, w \in H$. Osoita, että $U := P(H)$ on suljettu aliavaruus ja $P = P_U$.

Tehtävä 9.24. Osoita, että $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ei ole sisätuloavaruus.

9.2. Sisätuloisomorfismeista ja upotuksista.

Määritelmä 9.8. Bijektiivinen lineaarikuvaus $L: V \rightarrow W$ kahden sisätuloavaruuden välillä on *(sisätulo-)isomorfismi*, mikäli

$$\langle L(v), L(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

kaikilla $v, w \in V$.

Tilanteessa, jossa ylläoleva ehto toteutuu, mutta lineaarikuvaus ei ole välttämättä surjektiivinen, kutsumme kuvausta *(sisätulo)isomorfiseksi upotukseksi*.

Lause 9.9. *Olkoon $L: V \rightarrow W$ lineaarikuvaus. Tällöin L on sisätuloisomorfismi jos ja vain jos L on isometria sisätulojen indusoimien normien suhteen.*

Tehtävä 9.25. Todista Lause 9.9 reaalisten sisätulojen tapauksessa.

Esimerkki 9.10. Lauseen 9.9 todistus kompleksisten sisätulojen tapauksessa.

Lause 9.11. *Olkoon V sisätuloavaruus. Tällöin on olemassa isometrinen upotus $T: V \rightarrow H$ s.e. $\overline{T(V)} = H$, missä H on Hilbertin avaruus.*

Jos $\hat{H}$ on mikä tahansa toinen Hilbertin avaruus s.e. on olemassa upotus $\hat{T}: V \rightarrow \hat{H}$ jolle $\hat{T}(V) = \hat{H}$, niin avaruudet H ja $\hat{H}$ ovat sisätuloisomorfiset.

Todistus. Olemassaolo: tehtävät 9.26–9.29, yksikäsitteisyys: esimerkki 9.13. $\square$

Huomautus 9.12. Kannattaa palauttaa mieleen Lauseen 3.20 asetelma ja sen todistava tehtäväsarja.

Tehtävä 9.26. Lauseen 9.11 tilanteessa, osoita, että sisätuloavaruudessa V mille tahansa Cauchyn jonoille (x_n) ja (y_n) pätee, että jono $a_n = \langle x_n, y_n \rangle$ on Cauchyn jono kunnassa $\mathbb{K}$.

(Vihje: Cauchyn ey. ja huomio, että $\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_k, y_k \rangle = \langle x_n, y_n \rangle - \langle x_k, y_n \rangle + \langle x_k, y_n \rangle - \langle x_k, y_k \rangle$.)

Tehtävä 9.27. Olkoon W Lauseen 3.20 antama Banachin avaruus ja $L: V \rightarrow W$ isometrinen upotus s.e. $T(V)$ on tiheä avaruudessa W .

Olkoot edelleen $v, w \in W$ sekä $(x_n), (\hat{x}_n), (y_n)$ sekä $(\hat{y}_n)$ jonoja s.e. $x_n \rightarrow v, \hat{x}_n \rightarrow v, y_n \rightarrow w$ ja $\hat{y}_n \rightarrow w$. Osoita, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \hat{x}_n, \hat{y}_n \rangle.$$

Tehtävä 9.28. Edellisen lauseen tilanteessa, osoita että asettamalla millä tahansa $v, w \in W$

$$S(v, w) := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y_n \rangle,$$

missä (x_n) ja (y_n) ovat jonoja avaruudessa V s.e. $T(x_n) \rightarrow v$ ja $T(y_n) \rightarrow w$, saamme aikaan hyvinmääritellyn sisätulon avaruudessa W .

Tehtävä 9.29. Lauseen 9.11 tilanteessa, jatkona edelliseen tehtävään, osoita että isometria L on haluttu sisätuloisomorfismi.

Esimerkki 9.13. . Yksikäsitteisyys.

10. RIESZIN ESITYSLAUSE

Tässä kappaleessa todistetaan meille ehkä tärkein Hilbertin avaruuk-sien tulos, eli Rieszin esityslause. Sitä ennen vielä muutama sana orto-komplementeista ja ortoprojektioista.

10.1. Ortoprojektiot. Tässä kappaleessa todistetaan, että jos U on Hilbertin avaruuden suljettu aliavaruus, niin lähimmän pisteen kuvaus P_U on lineaarinen. Todistamme väitteen vähän pidemmän kaavan kaut-ta.

Lemma 10.1. *Olkoon $U \subset H$ Hilbertin avaruuden aito suljettu aliavaruus. Tällöin $U^\perp \neq \{0\}$.*

Todistus. Todista Lemma 10.1 □

Lemma 10.2. *Olkoon H Hilbertin avaruus. Osajoukko $M \subset H$ on tiheä jos ja vain jos $M^\perp = \{0\}$.*

Todistus. Todista Lemma 10.2. □

Lause 10.3. *Olkoon $U \subset H$ Hilbertin avaruuden suljettu aliava-ruus ja $u \in U$. Tällöin $h - u \in U^\perp$ jos ja vain jos $\|h - u\| = d(h, U)$.*

Todistus. Seuraavat kaksi tehtävää. □

Tehtävä 10.1. Olkoon $U \subset H$ Hilbertin avaruuden suljettu aliavaruus ja $u \in U$. Todista, että jos $h - u \in U^\perp$, niin $\|h - u\| = d(h, U)$.

(Vihje: Tutki lauseketta $2 \operatorname{Re}(\langle h - u, z - u \rangle)$.)

Tehtävä 10.2. Olkoon $U \subset H$ Hilbertin avaruuden suljettu aliavaruus ja $u \in U$. Todista, että jos $\|h - u\| = d(h, U)$, niin $h - u \in U^\perp$.

(Vihje: Tutki lauseketta $\operatorname{Re}(\langle h - u, (u + tz) - u \rangle)$, ja sijoita $t = \langle h - u, z \rangle$.)

Lause 10.4. *Olkoon $U \subset H$ Hilbertin avaruuden suljettu aliava-ruus. Tällöin kaikilla $h \in H$ on olemassa yksikäsitteinen $h_U \in U$ s.e. $h - h_U \in U^\perp$ ja $\|h - h_U\| = d(h, U)$.*

Tehtävä 10.3. Todista Lause 10.4.

Määritelmä 10.5. Olkoon $U \subset H$ Hilbertin avaruuden suljettu aliavaruus. Tällöin lähimmän pisteen kuvausta $P_U: H \rightarrow U$ kutsu-taan *ortogonaaliprojektioiksi* (avaruudelle U).

Lause 10.6. Olkoon $U \subset H$ Hilbertin avaruuden suljettu aliavaruus. Tällöin ortogonaaliprojektio on rajoitettu lineaarikuvaus, $\|P_U\| \leq 1$ ja jos $U \neq \{0\}$, niin $\|P_U\| = 1$.

Todistus. Tehtävät 10.4–10.6 □

Tehtävä 10.4. Lauseen 10.6 tilanteessa, osoita että kuvaus P_U on lineaarinen.

Tehtävä 10.5. Lauseen 10.6 tilanteessa, osoita että $\|P_U\| \leq 1$ käyttämällä Pythagoraan kaavaa.

Tehtävä 10.6. Lauseen 10.6 tilanteessa, osoita että $\|P_U\| = 1$ jos $U \neq \{0\}$.

Määritelmä 10.7. Olkoot U ja W vektoriavaruuden V aliavaruuksia. Jos jokainen $v \in V$ voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa $v = u + w$, missä $u \in U$ ja $w \in W$, niin sanomme että *avaruus V on avaruuksien U ja W suora summa*, merkitään $V = U \oplus W$.

Jos V on lisäksi sisätuloavaruus ja $u \perp w$ kaikilla $u \in U$, $w \in W$, niin sanotaan että *avaruus V on avaruuksien U ja W ortogonaalinen suora summa*, merkitään $V = U \oplus^\perp W$.

Tehtävä 10.7. Osoita, että Hilbertin avaruudessa H pätee

$$H = U \oplus^\perp U^\perp$$

kaikilla suljetuilla aliavaruuksilla $U \subset H$.

Tehtävä 10.8. Osoita, että jos u ja v ovat vektoreita Hilbertin avaruudessa H , niin

$$P_U(v) = \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|} \frac{u}{\|u\|}$$

ja

$$v = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|} \frac{u}{\|u\|} + P_{U^\perp}(v),$$

missä $U = \langle u \rangle$.

(Vihje: Todista ensin tilanteessa $\|u\| = 1$.)

Seuraavaa määritelmää ei hirveästi käytetä ainakaan lähiaikoina, mutta on hyvää taustatietoa.

Määritelmä 10.8. Jos $V_j, j \in \mathbb{N}$ ovat vektoriavaruuksia, niin merkitään niiden *suoraa summaa*

$$\bigoplus_{j=1}^{\infty} V_j = \{(v_j) \mid v_j \in V_j, v_j \neq 0 \text{ vain äärellisen monella } j\}$$

ja *suoraa tuloa*

$$\bigotimes_{j=1}^{\infty} V_j = \{(v_j) \mid v_j \in V_j\} = \prod_{j=1}^{\infty} V_j$$

Yleisemmin, jos S on mikä tahansa indeksijoukko ja $\{V_s \mid s \in S\}$ kokoelma vektoriavaruuksia, niin niiden *suora tulo* on

$$\bigotimes_{s \in S} V_s := \prod_{s \in S} V_s,$$

ja *suora summa* on

$$\bigoplus_{s \in S} = \left\{ f: S \rightarrow \prod_{s \in S} V_s \mid f(s) \neq 0 \text{ vain äärellisen monella } s \in S \right\}.$$

Esimerkki 10.9. Reaalisten polynomien avaruus on numeroituva suora summa reaaliluvuista.

10.2. Rieszin esityslause. Seuraavaksi pääsemme todistamaan Rieszin esityslauseetta, joka takaa että Hilbertin avaruudessa ei pelkästään päde, että sisätulo kiinnitetyn vektorin kanssa antaa funktionaalin vaan että kaikki funktionaalit ovat tätä muotoa.

Lause 10.10 (Rieszin esityslause). *Olko H Hilbertin avaruus. Tällöin kaikilla $v' \in H'$ on olemassa yksikäsitteinen $v \in H$ s.e. $v'(w) = \langle w, v \rangle$ kaikilla $w \in H$.*

Todistus. Tehtävät 10.9–10.15. □

Tehtävä 10.9. Lauseen 10.10 tilanteessa, todista väite kun v' on vakiofunktio nolla.

Tehtävä 10.10. Lauseen 10.10 tilanteessa, osoita että jos $L \in H'$ ei ole vakiokuvaus nolla, niin

- (1) $\ker(L) \subset H$ on suljettu aito aliavaruus, ja
- (2) $L|_{\ker(L)^\perp}$ on injektio.

Tehtävä 10.11. Lauseen 10.10 tilanteessa, osoita edelleen että jos $L \in H'$ ei ole vakiokuvaus nolla, niin

- (1) $\dim(\ker(L)^\perp) = 1$, ja
- (2) $L(w) \neq 0$ kaikilla $w \in \ker(L)^\perp - \{0\}$.

Tehtävä 10.12. Tehtävän 10.10 tilanteessa, osoita että jos $L \in H'$, niin

$$L(v)w - L(w)v \in \ker(L)$$

kaikilla $v, w \in H$.

Tehtävä 10.13. Edellisen tehtävän tilanteessa, osoita edelleen että jos $w \in \ker(L)^\perp - \{0\}$, niin

$$L(v) = \left\langle v, \frac{L(w)}{\|w\|^2} w \right\rangle.$$

(Vihje: osoita ensin että $L(w)\langle v, w \rangle - L(v)\|w\|^2 = 0$.)

Tehtävä 10.14. Tehtävän 10.10 tilanteessa osoita, että kaikilla $v' \in H'$ on olemassa v s.e. $v'(w) = \langle w, v \rangle$ kaikilla $w \in H$.

Tehtävä 10.15. Tehtävän 10.10 tilanteessa osoita, että kaikilla $v' \in H'$ on olemassa *yksikäsitteinen* v s.e. $v'(w) = \langle w, v \rangle$ kaikilla $w \in H$.

(Vihje: Tehtävä 10.11.)

Lause 10.11. *Olkoon H Hilbertin avaruus. Tällöin kuvaus*

$$T: H \rightarrow H', \quad (T(v))(w) = \langle v, w \rangle$$

on isometria.

Todistus. Riittää todistaa surjektiivisuus, muut kohdat on jo todistettu lauseessa 8.10. Surjektiivisuus on seuraava tehtävä. $\square$

Tehtävä 10.16. Todista, että lauseen 10.11 kuvaus on surjektio.

Esimerkki 10.12. Hilbertin avaruus on aina refleksiivinen, eli $H \approx H''$.

Tehtävä 10.17. Osoita, että Hilbertin avaruuden H duaali H' on Hilbertin avaruus kun se varustetaan sisätulolla

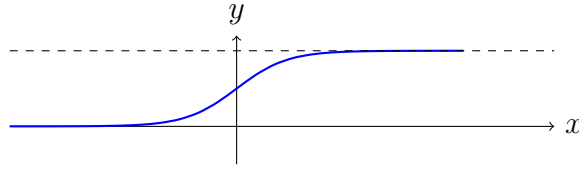
$$\langle v', w' \rangle = \langle T^{-1}(v'), T^{-1}(w') \rangle,$$

missä T on Lauseen 10.11 kuvaus.

10.3. Cybenkon lause. Tässä kappaleessa käydään läpi versio *Cybenkon lauseesta*, kts. [Cyb89], joka on luonteeltaan omalaatuinen approksimaatiotulos, mutta sillä on huomattavasti sovelluksia neuroverkkojen teoreettisessa tutkimuksessa. Cybenkon lauseen todistaminen on myös hyvä esimerkki siitä, mitä hyvin abstrakteilla funktionaalianalyysin lauseilla voi tehdä.

Määritelmä 10.13. Jatkuva kuvaus $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on *sigmoidi*^a, mikäli

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \sigma(t) = 0.$$



KUVA 1. Esimerkki sigmoidista, $\sigma(t) = \frac{1}{1+\exp(-x)}$.

(Katso kuva 1.)

^aTämä ei ole mikään standardoitu määritelmä.

Lause 10.14 (Cybenkon lause). *Olkoon σ sigmoidi. Tällöin kuvaukset muotoa*

$$G: [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(t) = \sum_{j=1}^N \sigma(\alpha_j \cdot t + \beta_j),$$

missä $N \in \mathbb{N}$ ja $\alpha_j \in \mathbb{R}^n$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, muodostavat tiheän aliavaruuden normiavaruudessa $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Huomautus 10.15. Todistamme lauseen hieman heikommassa muodossa, jossa $n = 1$ ja tiheys on normin $\|\cdot\|_2$ mielessä. Rajoite $n = 1$ johtuu teknisten detajien vähentämisestä ja normin muutos siitä, että meillä on Rieszin lause todistettuna vain Hilbertin avaruuksien tilanteessa.

Määritelmä 10.16. Kuvaus $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on $L^2(I, \mathbb{R})$ -separoiva^a, mikäli kaikilla $\phi \in L^2(I, \mathbb{R})$, missä ϕ ei ole nollafunktio, on olemassa $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ s.e.

$$\int_I \sigma(\alpha t + \beta) \phi(t) dt \neq 0.$$

^aTämäkään ei ole mikään standardoitu määritelmä.

Lemma 10.17. *Olkoon σ sigmoidi. Tällöin se on $L^2([0, 1], \mathbb{R})$ -separoiva.⁷*

⁷ Vaikka Cybenkon lause on nimetty Cybenkon mukaan on syytä pitää mielessä että hänen tutkimusryhmässään toimi muitakin tutkijoita. Erityisesti tutkimusongelmissa joissa tämä lemma ei riittänyt hän usein valjasti hommiin kaksi jatko-opiskelijaansa, kummatkin nimeltään Sebastian Sigmoid, jotka olivat velhoja funktioteknikoiden kanssa. Usein heidän onnistuttuaan Cybenko iloisesti huudahtikin: *Harva sigmoid-funktio ä-l-kaks-sepa-roi, niin kuin kaks sigmoid-Sebaa-funkto-roi!*

Tehtävä 10.18. Lemman 10.18 tilanteessa, osoita että kaikilla $\alpha, \beta, t, a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sigma(\lambda(\alpha t + \beta) + a) = \begin{cases} 1, & \text{kun } \alpha t + \beta > 0, \\ 0, & \text{kun } \alpha t + \beta < 0, \\ \sigma(a), & \text{kun } \alpha t + \beta = 0. \end{cases}$$

Tehtävä 10.19. Jatkona äskeiselle tehtävälle, merkitään $\sigma_\lambda(t) = \sigma(\lambda(\alpha t + \beta) + a)$ ja oletetaan, että $\phi \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ on s.e.

$$\int_I \sigma(\alpha t + \beta) \phi(t) dt = 0$$

kaikilla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Käyttäen edellistä tehtävää ja Lebesguen dominoidun konvergenssin takaamaa ominaisuutta

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_I \sigma_\lambda(t) \phi(t) dt = \int_I \left(\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sigma_\lambda(t) \right) \phi(t) dt$$

osoita, että $\int_c^1 \phi = 0$ kaikilla $c \geq 0$.

Tehtävä 10.20. Jatkona edelliselle tehtävälle, todista Lemma 10.18

10.3.1. *Cybenkon Lauseen todistus.* Tässä alikappaleessa sigmoidi σ on kiinnitetty. Edelleen merkitsemme Lauseessa 10.14 esiintyvää kuvausjoukkoa S .

Todistetaan, että joukko S on tiheä avaruudessa $L^2([0, 1], \mathbb{R})$ varustettuna L^2 -normilla. Tästä erityisesti seuraa, että jokaista jatkuvaa funktiota voi approksimoida joukon S kuvauksilla L^2 -normin mielessä.

Tehtävä 10.21. Osoita, että joukko S on vektori(ali)avaruus.

Tehtävä 10.22. Oletetaan alkuun että $\overline{S} \neq L^2$. Osoita, että tällöin on olemassa nollasta poikkeava funktionaali $L: L^2 \rightarrow \mathbb{R}$ s.e. $L|_{\overline{S}} = 0$.

Tehtävä 10.23. Edellisen tehtävän tilanteessa, käyttäen Rieszin esityslausetta ja funktion σ separoituvuutta, johda ristiriita.

Huomautus 10.18. Nyt siis tiedämme, että millä tahansa L^2 -funktioilla f löytyy jono funktioita $g_n \in S$ s.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - g_n\|_2 = 0$. Normit $\|\cdot\|_\infty$ ja $\|\cdot\|_2$ eivät ole ekvivalentteja, joten emme saa tästä automaattisesti tasaista suppenemista.

Kuvaukset g_n ja f ovat kuitenkin jatkuvia, joten ei ole hankala todistaa että jono suppenee kohti rajafunktiota pisteittäin. Tasainen approksimaatio onnistuu myös, mutta vaatii hieman erilaista versiota Rieszin lauseesta; tarvitsisimme tietoa että jokaisella funktionaalilla $L: (C^0([0, 1], \mathbb{R})) \rightarrow \mathbb{R}$ on olemassa mitta μ s.e. $L(f) = \int f d\mu$ kaikilla $f \in C^0$. Tämän jälkeen loppu todistuksesta meni läpi suunnilleen samaan tyyliin – kts. esim. [Cyb89].

Huomautus 10.19. Kannattaa verrata mielessään todistustamme Cybenkon lauseeseen sekä todistustamme sille että C^0 on separoituva; näytämme että jatkuvia funktioita voi approksimoida tietyntyylisillä funktioilla eli polynomeilla. (Kts. Tehtävä 3.17 ja miten se käyttää Stonen ja Weierstrassen lausetta D.3, sekä lemmat mitä Stone-Weierstrass käyttää.)

11. FOURIER JA ORTONORMAALIT JOUKOT

Tässä kappaleessa siirrytään tutkimaan Fourier'n muunnosta. Jos olet törmännyt Fourier-analyysiin ennen, niin seuraava on kertausta, jos et, niin seuraava esittelee hyvin lyhyesti kiinnostavan matemaattisen härvelin. Sen tarkka määritelmä tulee myöhemmin.

Oletetaan, että meillä on jokin kuvausjoukko V , jossa seuraavat integraalit ovat kaikki hyvinmääritellyjä ja $f \in V$. Nyt Fourier'n muutos määritellään asettamalla

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}(f))(x) &:= \int f(t) \exp(-2\pi i x t) dt \\ &= \int f(t) \cos(-2\pi x t) dt + i \int f(t) \sin(-2\pi x t) dt. \end{aligned}$$

Tämän kurssin yhteydessä huomaamme tästä kuvauksesta heti useampiakin asioita.

- (1) $\mathcal{F}: V \rightarrow V$ on lineaarinen kuvaus.
- (2) Operaattorin $\mathcal{F}$ määritelmä antaa toivoa, että operaattori saattaisi olla rajoitettu.
- (3) Operaattori on itse asiassa muotoa $f \mapsto \langle f, g \rangle$ missä sisätulo on L^2 -sisätulo ja g kiinnitetty kuvaus.

Edelleen, jos tutkitaan funktion f Fourier'n kertoimia, eli

$$a_n = \int f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \int f(x) \sin(nx) dx,$$

niin edelleen aika yleisessä tilanteessa on totta, että

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Erityisesti, jos merkitään $g_n(x) = \cos(nx)$ kun $n \geq 0$ ja $g_n(x) = \sin(-nx)$ kun $n < 0$, niin saadaan että ylläolevassa tilanteessa

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle f, g_j \rangle g_j.$$

Tämän muotoinen kaava tavataan äärellisulotteisessa funktionaalianalyysissä eli lineaarialgebrassa, ja antaa tavan esittää vektorin ortonormaalisessa kannassa:

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle e_i.$$

Tämän kappaleen idea on osoittaa, että Fourier'n teorian perusidea on tämän äärellisulotteisen tapauksen yleistys.

11.1. Ortosysteemit. Alkuun hieman ortogonaalisista ja ortonormaalista systeemeistä sekä kannoista.

Määritelmä 11.1. Olkoon H Hilbertin avaruus ja $K \subset H$ sen osajoukko joka ei sisällä nollavektoria. Sanomme, että

- (1) K on *ortogonaali systeemi*, mikäli $v \perp w$ kaikilla $v, w \in K$.
- (2) K on *ortogonaalinen kanta*, mikäli K on maksimaalinen ortogonaali systeemi.
- (3) K on *ortonormaali systeemi*, mikäli $v \perp w$ ja $\|v\| = \|w\| = 1$ kaikilla $v, w \in K$.
- (4) K on *ortonormaali kanta*, mikäli K on maksimaalinen ortonormaali systeemi.

Huomaa, että ortonormaali kanta ei ole välttämättä Hamelin kants. Kts. Tehtävät 11.1–11.2.

Muista, että ortogonaali systeemi on aina lineaarisesti riippumaton, kts. Tehtävä 8.18. Sallimme ortonormaaliksi– (ja siten ortogonaaliksi) systeemiksi myös tyhjän joukon.

Tehtävä 11.1. Osoita, että jonot $(e_j^k)_{j=1}^\infty \in \ell^2(\mathbb{R})$,

$$e_j^k = \begin{cases} 1, & \text{kun } k = j, \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

muodostavat sisätuloavaruuden $\ell^2(\mathbb{R})$ ortonormaalien kannan.

Tehtävä 11.2. Osoita, että edellisen tehtävän ortonormaali systeemi ei ole avaruuden ℓ^2 kanta.

Esimerkki 11.2. Esimerkkejä ortonormaalista systeemeistä:

- (1) Viime luvussa kohdattu kokoelma

$$\left\{ x \mapsto \frac{1}{2\pi} \cos(nx) \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ x \mapsto \frac{1}{2\pi} \sin(nx) \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

avaruudessa $L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$.

- (2) Äskeisen eräänlainen kompleksivastine

$$\{\exp(inx) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

avaruudessa $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$.

- (3) N.k. *Legendren polynomit*, kts. esim. https://fi.wikipedia.org/wiki/Legendren_polynomi

Lemma 11.3. . Olkoon $A \subset H$ Hilbertin avaruuden ortogonaali systeemi. Tällöin on olemassa ortogonaali kanta $K \supset A$. Olkoon $B \subset H$ Hilbertin avaruuden ortonormaali systeemi. Tällöin on olemassa ortonormaali kanta $K' \supset B$.

Tehtävä 11.3. Todista Lemma 11.3.

(Vihje: Kuten Hamelin kannan olemassaolon todistus.)

Lause 11.4. *Olkoon H Hilbertin avaruus, $U \subset H$ sen äärellisulotteinen aliavaruus ja $e_1, \dots, e_n$ aliavaruuden U ortonormaali kanta. Tällöin kaikilla $v \in H$ ja $u \in U$ pätee*

$$(11.1) \quad P_U(v) = \sum_{j=1}^n \langle v, e_j \rangle e_j,$$

$$(11.2) \quad \|P_U(v)\|^2 = \sum_{j=1}^n |\langle v, e_j \rangle|^2, \text{ ja}$$

$$(11.3) \quad \|u\|^2 = \sum_{j=1}^n |\langle u, e_j \rangle|^2.$$

Tehtävä 11.4. Todista Lauseen 11.4 yhtälö (11.1).

Tehtävä 11.5. Todista Lauseen 11.4 yhtälö (11.2).

Tehtävä 11.6. Todista Lauseen 11.4 yhtälö (11.3).

Lause 11.5 (Gram-Schmidt). *Olkoon H Hilbertin avaruus ja $E \subset H$ äärellinen tai numeroituva joukko. Tällöin on olemassa ortonormaali systeemi K jolle pätee $\langle K \rangle = \langle E \rangle$.*

Todistus. Seuraava tehtävä. □

Tehtävä 11.7. Todista Lause 11.5.

(Vihje: numeroi joukko $E = \{v_0, v_1, \dots\}$, aseta $e_0 = v_0/\|v_0\|$, $\hat{e}_{n+1} = (v_{n+1} - P_{\langle e_0, \dots, e_n \rangle}(v_{n+1}))$ ja $e_k = \hat{e}_k/\|\hat{e}_k\|$. Osoita että $\{e_j\}$ on haluttu ortonormaali systeemi.)

Esimerkki 11.6. Gram-Schmidt antaa tavan generoida algoritmisesti ortonormaaleja systeemejä lineaarisesti riippumattomista joukoista. Jos Gram-Schmidtä soveltaa avaruuden $L^2([-1, 1], \mathbb{R})$ lineaarisesti riippumattomaan joukkoon $\{x \mapsto x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, syntyy joukko jota kutsutaan *Legendren polynomeiksi*.

Lause 11.7 (Besselin epäyhtälö). *Olkoon V sisätuloavaruus ja K sen ortonormaali systeemi. Tällöin kaikilla $v \in V$,*

$$\sum_{k \in K} |\langle v, k \rangle|^2 \leq \|v\|^2.$$

Ennen Besselin lauseen todistamista, muutama aputulos.

Tehtävä 11.8. Todista lause 11.7 tilanteessa, missä K on äärellinen.

(Vihje: kiinnitä $N \in \mathbb{N}$, merkitse $w = \sum_{j=1}^N \langle v, k_j \rangle k_j$ ja tutki ilmaisua $w + (v - w)$ Pythagoraan lauseen avulla.)

Tehtävä 11.9. Todista lause 11.7 tilanteessa, missä K on numeroituvasti ääretön.

(Vihje: kiinnitä $N \in \mathbb{N}$, merkitse $w = \sum_{j=1}^N \langle v, k_j \rangle k_j$ ja tutki ilmaisua $w + (v - w)$ Pythagoraan lauseen avulla.)

Lause 11.8. Olkoon V sisätuloavaruus ja $K \subset V$ ortonormaali systeemi. Tällöin kaikilla $v_0 \in V$, $\langle k, v_0 \rangle \neq 0$ enintään numeroituvan monella $k \in K$.

Todistus. Seuraava tehtävä. □

Tehtävä 11.10. Todista Lause 11.8.

(Vihje: Besselin epäyhtälö numeroituville joukoille, tutki myös ortonormaalin systeemin sitä osajoukkoa, jonka alkioiden sisätulot vektorin v_0 kanssa ovat vähintään $1/n$.)

Tehtävä 11.11. Todista Besselin epäyhtälö, eli Lause 11.7.

Lause 11.9. Olkoon V sisätuloavaruus ja $K := \{k_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ numeroituva ortonormaali systeemi avaruudessa V . Tällöin sarja

$$\sum_{j=1}^{\infty} \langle v, k_j \rangle \langle k_j, w \rangle$$

suppenee itseisesti kaikilla $v, w \in V$.

Todistus. Seuraava tehtävä. □

Tehtävä 11.12. Todista Lause 11.9.

(Vihje: Hölderin epäyhtälö avaruuksissa ℓ^1 , ℓ^2 ja Besselin epäyhtälö.)

11.2. Fourier-muunnos.

Määritelmä 11.10. Olkoon H Hilbertin avaruus ja E sen ortonormaali kanta. Kaikilla $v \in H$, lukuja $\langle v, e \rangle$, missä $e \in E$, kutsutaan vektorin v Fourier'n kertoimiksi.

Huomaa, että Fourier'n kertoimet määritellään vain Hilbertin avaruuksissa, ja ne riippuvat aina valitusta ortonormaalista kannasta.

Lause 11.11. Olkoon H Hilbertin avaruus ja E sen ortonormaali kanta. Kaikilla $v \in H$,

$$v = \sum_{e \in E} \langle v, e \rangle e.$$

Lauseen 11.11 todistamiseen tarvitaan muutama lemma.

Lemma 11.12. *Olkoon H Hilbertin avaruus ja $E \subset H$ ortonormaali systeemi. Tällöin sarja*

$$\sum_{e \in E} \langle v, e \rangle e$$

suppenee kaikilla $v \in H$ riippumatta summattavien järjestyksestä.

Tehtävä 11.13. Todista Lemma 11.12.

(Vihje: Osoita Besselin epäyhtälön ja Pythagoraan lauseen avulla, että missä tahansa järjestyksessä summattavien joukko onkaan, jokaisen osasuman normin neliötä rajoittaa $\|h\|^2$.)

Lemma 11.13. *Olkoon H Hilbertin avaruus ja $E \subset H$ ortonormaali systeemi. Tällöin kaikilla $v \in H$,*

$$\sum_{e \in E} \langle v, e \rangle e = P_{\overline{\langle E \rangle}}(v),$$

missä P_U on ortoprojektio suljetulle aliavaruudelle $U := \overline{\langle E \rangle}$.

Tehtävä 11.14. Todista Lemma 11.13.

(Vihje: Osoita, että $v - \sum_{e \in E} \langle v, e \rangle e \in \overline{\langle E \rangle}^\perp$ käyttämällä 'kaikkia' viime luvun tuloksia.)

Tehtävä 11.15. Todista Lause 11.11.

(Vihje: Osoita, että ortonormaalien kannan sulkeuma on koko avaruus vastaoletuksen kautta.)

Esimerkki 11.14. Yksi tärkeimpiä esimerkkejä ortonormaalista kannasta ja siihen liittyvistä Fourier-kertoimista on tietenkin Fourier'n muunnos ja siihen liittyvät kannat avaruudessa $L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$.

11.3. Separoituvat Hilbertin avaruudet. Tässä kappaleessa perehdytään siihen, että Hilbertin avaruuksien geometria on itse asiassa todella rigidi – separoituvia Hilbertin avaruuksia ei ole kuin yksi.

Seuraava lause käyttää hyväkseen hieman yleistä mittateoriaa. Tässä lukumäärämitta $\mu_\#$ laskee annetun joukon alkioiden lukumäärän. Huomaa, että jos joukko A on äärellinen tai numeroituva ja $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ mikä tahansa funktio, niin

$$\int_A f d\mu_\# = \sum_{x \in A} f(x).$$

Tähän mittaan liittyvää L^p -avaruutta merkitään

$$L^p(E, \mu_\#, \mathbb{K}) := \left\{ f: E \rightarrow \mathbb{K} \mid \int_E |f|^p d\mu_\# < \infty \right\}.$$

Edelleen $L^p((\mathbb{N}, \mu_\#), \mathbb{K}) = \ell^p(\mathbb{K})$ kaikilla $p \geq 1$. Tämän mitan toimintaa, avaruutta $L^p(A, \mu_\#, \mathbb{K})$ yms. käsitellään luennolla, kuten myös seuraavaa lausetta ja sen todistusta.

Huomautus. Jälkeenpäin lisättynä huomiona, tämän yleisen mittateorian idean olisi voinut kiertää näppärästi määrittelemällä, että millä tahansa indeksijoukolla S ja kokoelmalla *epänegatiivisia* lukuja $\{a_s \mid s \in S\}$ voidaan määritellä

$$\sum_{s \in S} a_s := \sup \left\{ \sum_{s \in A} a_s \mid A \subset S \text{ on äärellinen} \right\} \in [0, \infty].$$

Tämä antaa järkevän määritelmän joka yleistää järkevästi äärellisiä ja numeroituvia summia.

Tällä määritelmällä, mikäli E on joukko ja $f: [0, \infty)$ funktio, niin

$$\int_E f(e) d\mu_{\#}(e) = \sum_{e \in E} f(e).$$

Jos yleinen mittateoria tai mitta $\mu_{\#}$ ahdistaa, niin lisää oletus että E on numeroituva ja korvaa avaruus $L^p(E, \mu_{\#}, \mathbb{K})$ avaruudella $\ell^2(\mathbb{K})$.

Lause 11.15. *Olkoon H Hilbertin avaruus ja E sen ortonormaaliosajoukko. Muodostetaan mitta-avaruus $(E, \mu_{\#})$, missä $\mu_{\#}$ on lukumäärämitta. Tällöin kuvaus*

$$T: H \rightarrow L^2(E, \mu_{\#}) := \left\{ f: E \rightarrow \mathbb{K} \mid \int_E |f|^2 d\mu_{\#} < \infty \right\},$$

missä $(T(w))(e) = \langle w, e \rangle$ on rajoitettu lineaarikuvaus ja $T|_{\overline{\langle E \rangle}}$ on isometria.

Todistus. Kuvauksen T rajoittuneisuus ja se, että rajoittuma $T|_{\overline{\langle E \rangle}}$ on isometrinen upotus osoitetaan seuraavassa kolmessa tehtävässä.

Riittää siis osoittaa, että kuvauksen rajoittuma joukkoon $\overline{\langle E \rangle}$ on surjektio. Mutta välittömästi huomataan, että $T(\langle E \rangle)$ koostuu täsmälleen niistä $f \in L^2(E, \mu_{\#})$, joilla $f(e) \neq 0$ vain äärellisen monella $e \in E$.

Mikäli maalina olisi $\ell^2(\mathbb{K})$, niin erityisesti $T(\langle E \rangle)$ olisi niiden jonojen kokoelma, joilla on vain äärellisen monta nollasta poikkeavaa arvoa. Osoitimme tällaisten jonojen olevan tiheässä avaruuksissa $\ell^p(\mathbb{K})$ jossain aiemmassa vaiheessa luennolla, muistaakseni. Yleisemmässä tilantessa pätee, että itse asiassa integraalin määritelmän nojalla

$$\begin{aligned} \int_E |f|^2 d\mu_{\#} &= \sup \left\{ \int_E |g|^2 d\mu_{\#} \mid g \in T(\langle E \rangle), |g(e)| \leq |f(e)| \text{ kaikilla } e \in E \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{e \in E} |g|^2 \mid g \in T(\langle E \rangle), |g(e)| \leq |f(e)| \text{ kaikilla } e \in E \right\}. \end{aligned}$$

Tästä huomataan, tutkimalla jonoa kuvauksia $g_n \in T(\langle E \rangle)$ jotka lähestyvät ylläolevaa supremumia, että itse asiassa $\overline{\langle E \rangle} = L^2(E, \mu_{\#}, \mathbb{K})$. $\square$

Tehtävä 11.16. Lauseen 11.15 tilanteessa osoita, että T on rajoitettu lineaarikuvaus ja $\|T\| \leq 1$.

Tehtävä 11.17. Lauseen 11.15 tilanteessa osoita, että $\|T(e)\| = \|e\| = 1$ kaikilla $e \in E$.

Tehtävä 11.18. Jatkona edelliselle tehtävälle, osoita että $\|T(v)\| = \|v\|$ kaikilla $v \in \overline{\langle E \rangle}$.

Lause 11.16. Olkoon $E \subset H$ Hilbertin avaruuden ortonormaali osajoukko. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.

- (1) Joukko E on avaruuden H ortonormaali kanta.
- (2) Aliavaruus $\langle E \rangle$ on tiheä aliavaruus.
- (3) Kaikilla $v \in H$ pätee Parsevalin yhtälö:

$$\sum_{e \in E} |\langle v, e \rangle|^2 = \|v\|^2.$$

- (4) Kaikille $v, w \in H$ on voimassa

$$\sum_{e \in E} \langle v, e \rangle \langle e, w \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Todistus. Tehtävät 11.19–11.22 □

Tehtävä 11.19. Todista Lauseen 11.16 implikaatio (1) $\Rightarrow$ (2).
(Vihje: Muistele Lauseen 11.11 todistamista.)

Tehtävä 11.20. Todista Lauseen 11.16 implikaatio (2) $\Rightarrow$ (3).
(Vihje: Sovella lausetta 11.15.)

Tehtävä 11.21. Todista Lauseen 11.16 implikaatio (3) $\Rightarrow$ (4).
(Vihje: Polaarikaavat.)

Tehtävä 11.22. Todista Lauseen 11.16 implikaatio (4) $\Rightarrow$ (1).

Lause 11.17. Olkoon H separoituva Hilbertin avaruus. Tällöin sen jokin^a ortonormaali kanta on numeroituva.

^aKaikki ortonormaalit kannat ovat itse asiassa yhtä mathtavia, mutta tätä ei ole vielä todistettu.

Tehtävä 11.23. Todista Lause 11.17.

(Sovella Gram-Schmidtia tiheään numeroituvaan osajoukkoon. Käytä sitten Lause 11.16.)

Lause 11.18 (Rieszin ja Fisherin lause). Olkoon E Hilbertin avaruuden H ortonormaali kanta. Tällöin avaruus H on isometrinen

avaruuden

$$L^2(E, \mu_{\#}) := \left\{ f: E \rightarrow \mathbb{K} \mid \int_E |f|^2 d\mu_{\#} < \infty \right\}$$

kansasa.

Todistus. Tämä seuraa nyt suoraan Lauseesta 11.15 ja Lauseen 11.16 huomiosta, että ortonormaalin kannan virittämän aliavaruuden sulkeuma on koko avaruus. $\square$

Lause 11.19. *Jokainen separoituva Hilbertin avaruus on isometrisen avaruuden $\ell^2(\mathbb{K})$ kanssa.*

Tehtävä 11.24. Todista ylläoleva Lause 11.19.

Tehtävä 11.25. Todista, että kaikki separoituvat (ääretönulotteiset) Hilbertin avaruudet ovat keskenään isometrisiä.

12. SPEKTREISTÄ JA SPEKTRAALITEORIASTA

Äärellisulotteisessa funktionaalianalyysissä eli lineaarialgebrassa puhutaan usein *ominaisarvoista* ja *ominaisvektoreista*. Funktionaalianalyysissä vastaavia termejä tutkittaessa puhutaan usein operaattorin spektristä, johon tässä kappaleessa perehdytään.

Muista, että (ääretönulotteisten) vektoriavaruuksien välistä lineaari-kuvausta kutsutaan kurssillamme usein operaattoriksi.

Määritelmä 12.1. Olkoon V vektoriavaruus ja $L: V \rightarrow V$ lineaarikuvauks. Mikäli $L(v) = \lambda v$ jollain $v \in V \neq 0$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$, niin skalaaria λ on tällöin kuvauksen L *ominaisarvo* ja vektori $v \in V$ (ominaisarvoa λ vastaava) *ominaisvektori*. Ominaisarvoa λ vastaavien ominaisvektorien kokoelmaa kutsutaan kyseisen ominaisarvon *ominaisavaruudeksi*.

Huomautus. Huomaa, että annettua ominaisarvoa vastaava ominaisavaruus on aina aliavaruus; jos $T(v) = \lambda v$ ja $T(w) = \lambda w$, niin

$$T(av + w) = aT(v) + T(w) = a\lambda v + \lambda w = \lambda(av + w).$$

Tehtävä 12.1. Osoita, että kuvauksen

$$D: C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad (D(f))(x) = f'(x)$$

ominaisarvoja ovat kaikki nollasta poikkeavat reaaliluvut.

(Vihje: eksponenttifunktio.)

Tehtävä 12.2. Tutki, onko kuvauksella

$$T: \ell^2(\mathbb{R}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{R}), \quad T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$$

ominaisarvoja.

Tehtävä 12.3. Tutki, onko kuvauksella

$$T: \ell^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{R}), \quad T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$$

ominaisarvoja.

Tehtävä 12.4. Osoita, että skalaari λ on lineaarikuvauksen $T: V \rightarrow V$ ominaisarvo jos ja vain jos lineaarikuvauks $L_\lambda := \lambda \text{id}_V - T$ ei ole injektio.

Huomautus 12.2. Huomaa, että äärellisulotteisessa funktionaalianalyysissä eli lineaarialgebrassa lineaarikuvauks $L: V \rightarrow V$ on injektio joss. se on surjektio joss. se on bijektio. Täten tehtävän 12.4 tuloksen avulla äärellisulotteisessa tilanteessa riittää tutkia kuvauksen L_λ surjektiivisuutta tai bijektiivisyyttä, esimerkiksi determinantin avulla. Funktionaalianalyysissä tilanne ei kuitenkaan ole ihan yhtä suorasuorainen; esimerkiksi Tehtävän 12.1 on surjektio, muttei injektio. (Kts. myös Määritelmä 12.6.)

Määritelmä 12.3. Olkoon V Banachin avaruus ja $L: V \rightarrow V$ rajoitettu operaattori. Operaattorin L *resolventtijoukko* on

$$\operatorname{res}(L) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid (\lambda \operatorname{id}_V - L) \text{ on kääntyvä}\}$$

ja sen *spektri* puolestaan

$$\operatorname{spec}(L) := \mathbb{K} \setminus \operatorname{res}(L).$$

Tehtävä 12.5. Muodosta kuvauksen

$$D: C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad (D(f))(x) = f'(x)$$

resolventtijoukko.

Tehtävä 12.6. Muodosta kuvauksen

$$D: C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad (D(f))(x) = f'(x)$$

spektri.

Tehtävä 12.7. Osoita, että jos $L: V \rightarrow V$ on rajoitettu lineaarikuvaus ja $\lambda \in \operatorname{res}(L)$, niin $(\lambda \operatorname{id}_V - L)^{-1}$ on rajoitettu.

(Vihje: Avoimen kuvauksen lause.)

Lause 12.4. . Olkoon V Banachin avaruus ja $T: V \rightarrow V$ rajoitettu operaattori. Tällöin $\lambda \in \operatorname{res}(T)$ kaikilla $\lambda \in \mathbb{K}$ joilla $|\lambda| > \|T\|$.

Tehtävä 12.8. Todista Lause 12.4.

(Vihje: Joko suora lasku, tai 'hauskemmin': Tehtävät 6.21 ja 6.22 sovellettuna sarjaan $\sum (T/\lambda)^k$.)

Huomautus 12.5. Äärellisulotteisessa tilanteessa lineaarisen operaattorin spektri on täsmälleen sen ominaisarvojen joukko. Ääretönulotteisessa tilanteessa meillä on myös muita vaihtoehtoja.

Määritelmä 12.6. Olkoon V Banachin avaruus ja $T: V \rightarrow V$ rajoitettu operaattori. Sanomme, että operaattorin T spektrin $\operatorname{spec}(T)$ alkio λ kuuluu

- (1) *pistespektriin*, mikäli λ on operaattorin T ominaisarvo.
- (2) *jatkuvaan spektriin* mikäli $\lambda \operatorname{id}_V - T$ on injektio mutta ei surjektio ja $(\lambda \operatorname{id}_V - T)(V)$ on tiheä avaruuden V aliavaruus.
- (3) *jäännösspektriin* mikäli $\lambda \operatorname{id}_V - T$ on injektio mutta $(\lambda \operatorname{id}_V - T)(V)$ ei ole tiheä avaruuden V aliavaruus.

Tehtävä 12.9. Muodosta kuvauksen

$$D: C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad (D(f))(x) = f'(x)$$

pistespektri, jatkuva spektri ja jäännösspektri.

Seuraavassa tehtävässä (ja tarvittaessa muutenkin) saa käyttää tietoa, että differentiaaliyhtälön

$$f' - \lambda^{-1}f = \lambda^{-1}g, \quad f(0) = 0$$

yksikäsitteinen ratkaisu on

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} \exp(x/\lambda) \int_0^x \exp(-s/\lambda) g(t) dt.$$

Tehtävä 12.10. Muodosta kuvauksen

$$I: C^0([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow C^0([0, 1], \mathbb{R}), \quad (I(f))(x) = \int_0^x f(t) dt$$

pistespektri, jatkuva spektri ja jäännösspektri.

(Vihje: Huomaa, että $(I(f))(0) = 0$ kaikilla $f \in C^0$.)

12.1. Kompakteista operaattoreista. Aiemmin puhuttiin siitä, että kompaktisuuden käsite ei ole kurssillamme yhtä helposti sovellettavissa tai yhtä hyödyllinen kuin äärellisen funktionaalianalyysin tapauksessa. Tämä johtuu suurissa osin siitä, että ääretönulotteisissa avaruuksissa kompaktit joukot ovat jossain mielessä harvinaisempia kuin äärellisulotteisissa avaruuksissa.

Erityisesti Heine-Borelin lause ei (yleensä) päde; suljettu ja rajoitettu joukko ei ole välttämättä kompakti ääretönulotteisessa avaruudessa. Äärellisulotteiset suljetut rajoitetut osajoukot kuitenkin ovat edelleen kompakteja, kuten seuraavassa tehtävässä osoitetaan.

Tehtävä 12.11. Olkoon V vektoriavaruus ja $U \subset V$ sen äärellisulotteinen vektorialiavaruus. Osoita, että jos $B \subset U$ on suljettu ja rajoitettu joukko avaruudessa U , niin se on kompakti.

Tehtävä 12.12. Osoita, että normiavaruus on äärellisulotteinen jos ja vain jos sen suljettu yksikkökuula on kompakti.

Edellisistä tehtävistä voisi nousta mieleen ajatus, että funktionaalianalyysissä ainoastaan äärellisulotteiset suljetut rajoitetut joukot voivat olla kompakteja, mutta asia ei ole näin yksinkertainen. Valaisevaa esimerkkiä varten tarvitaan seuraavaa Arzela-Ascolin lausetta, joka on (toivon mukaan) todistettu metristen avaruuksien kurssilla. (Lauseesta on myös muita muotoiluja, Lipschitz-ehdon voi korvata n.k. *yhtäjatkuvuudella*.)

Lause 12.7 (Arzela-Ascolin lause). *Olkoon (f_n) , $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jono L -Lipschitz -kuvaus s.e. joukko $\{f_n(0) \mid n \in \mathbb{N}\}$ on rajoitettu. Tällöin jonolla (f_n) on osajono, joka suppenee tasaisesti kohti L -Lipschitz -kuvausta $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.*

Todistus. Sivutetaan.

□

Tehtävä 12.13. Osoita, että avaruuden $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ osajoukko

$$\{f \in C^0([0, 1], \mathbb{R}) \mid f \text{ on } L\text{-Lipschitz ja } f(0) = 0\}$$

on kompakti.

Tehtävä 12.14. Osoita, että avaruuden $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ osajoukko

$$\{f \in C^0([0, 1], \mathbb{R}) \mid f \text{ on } L\text{-Lipschitz ja } f(0) = 0\}$$

on avaruuden $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ suljettu aliavaruus.

Tehtävä 12.15. Osoita, että avaruuden $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ aliavaruus

$$\{f \in C^0([0, 1], \mathbb{R}) \mid f \text{ on } L\text{-Lipschitz ja } f(0) = 0\}$$

ei ole äärellisulotteinen.

Merkitään jatkossa

$$C_L^0([0, 1], \mathbb{R}) := \{f \in C^0([0, 1], \mathbb{R}) \mid f \text{ on } L\text{-Lipschitz}\}.$$

Määritelmä 12.8. Olkoot V ja W normiavaruuksia ja $T: V \rightarrow W$ lineaarikuvaus. Sanomme, että operaattori T on *kompakti* (*operaattori*), mikäli $\overline{T(B)}$ on kompakti joukko kaikilla rajoitetuilla osajoukoilla $A \subset V$.

Tehtävä 12.16. Osoita, että lineaarikuvaus T on kompakti jos ja vain jos $\overline{T(B(0, 1))}$ on kompakti.

Tehtävä 12.17. Osoita, että normiavaruuksien kompakti operaattori on aina jatkuva.

Tehtävä 12.18. Osoita, että mikäli jatkuvan operaattorin kuvajoukko on äärellisulotteinen, niin operaattori on kompakti.

Tehtävä 12.19. Osoita, että inklusiokuvaus $\iota: C^1([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow C^0([0, 1], \mathbb{R})$, $\iota(f) = f$, on kompakti operaattori kun lähtö varustetaan normilla $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ ja maali normilla $\|\cdot\|_\infty$.
(Vihje: Tehtävä 12.15.)

Tehtävä 12.20. Osoita, että integrointioperaattori

$$I: C^0([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow C^0([0, 1], \mathbb{R}), \quad (I(f))(x) = \int_0^x f(t) dt$$

on kompakti.

(Vihje: Edellinen tehtävä.)

Tehtävä 12.21. Olkoot $T: V \rightarrow W$ ja $L: W \rightarrow U$ rajoitettuja lineaarikuvaus. Osoita, että jos jompikumpi operaattoreista on kompakti, niin tällöin myös yhdistetty kuvaus $V \rightarrow U$ on kompakti.

12.2. Kompaktien operaattorien spektreistä. Kompaktien operaattorien spektri on erilainen kuin yleisten kuvausten.

Tehtävä 12.22. Olkoon V Banachin avaruus ja $T: V \rightarrow V$ kompakti operaattori. Osoita, että tällöin $\ker(\text{id} - T)$ on äärellisulotteinen.

(Vihje: Tehtävä 12.12.)

Tehtävä 12.23. Olkoon V Banachin avaruus ja $T: V \rightarrow V$ kompakti operaattori. Tällöin jokaista nollasta poikkeavaa ominaisarvoa vastaava ominaisavaruus on äärellisulotteinen.

Lause 12.9. *Olkoon V ääretönulotteinen Banachin avaruus ja $T: V \rightarrow V$ kompakti operaattori. Tällöin $0 \in \text{spec}(T)$ ja $\text{spec}(T) \setminus \{0\}$ koostuu numeroituvasta määrästä operaattorin T ominaisarvoista.*

Todistus. Ensimmäinen kohta on harjoitustehtävä, toista käsitellään pääsiäisloman jälkeen. $\square$

Tehtävä 12.24. Olkoon V ääretönulotteinen Banachin avaruus ja $T: V \rightarrow V$ kompakti operaattori. Osoita, että $0 \in \text{spec}(T)$.

(Vihje: Tee vastaoletus ja osoita, että tällöin T^{-1} on rajoitettu. Käytä sitten Tehtävän 12.21 tulosta.)

Kompaktien operaattorien teorian avulla päästään (viimein) käsiksi prujun introssa sivuttuun ongelmaan. Luvun loppuosan todistuksia käydään läpi enemmän luennolla, nähä aiheet eivät tule tenttiin.

Määritelmä 12.10. Olkoon $K \in L^2([0, 1] \times [0, 1], \mathbb{K})$. Hilbertin ja Schmidtin integraalioperaattori (jonka ydin on K , on kuvaus

$$F_K: L^2([0, 1], \mathbb{K}) \rightarrow L^2([0, 1], \mathbb{K}), \quad (F_K(f))(x) = \int_0^1 K(x, t)f(t) dt.$$

Tehtävä 12.25. Olkoon $K \in L^2([0, 1] \times [0, 1], \mathbb{K})$. Tällöin Hilbertin ja Schmidtin integraalioperaattori F_K on rajoitettu.

Esimerkki 12.11. Olkoon $K \in L^2([0, 1] \times [0, 1], \mathbb{K})$. Tällöin Hilbertin ja Schmidtin integraalioperaattori F_K on kompakti.

Esimerkki 12.12. Ylläolevasta operaattorista saa sovelluksia differentiaaliyhtälöihin. Käsitellään näitä luennolla ja lisätään tähän. Vaihtoehtoisesti, kts. Parkkosen luentomoniste s.108–109.

13. HEIKKO SUPPENEMINEN

Tässä kappaleessa perehdytään niinkutsuttuun *heikkoon suppenemiseen*, joka indusoi avaruuteen *heikon topologian*.

Heikon topologian syvempi tutkiminen kannattaa, mutta erityisen hyödyllistä siinä vaiheessa olisi tuntea hieman laajemmin yleistä topologiaa. Erityisesti kuvausperheen indusoima topologia on kriittinen käsite, kuten on myös näppituntuma siitä, millainen voi olla ei-metristytvä topologia.

Palautetaan mieliin vektorien suppeneminen, funktionaalien vahva suppeneminen ja määritellään lopuksi heikko suppeneminen.

Määritelmä 13.1. Olkoon V normiavaruus ja V' sen duaali.

- (1) Avaruuden V jono (v_n) *suppenee (normin suhteen) kohti vektoria* $v_0 \in V$, merkitään $v_n \rightarrow v$, jos $\|v_n - v_0\| \rightarrow 0$.
- (2) Avaruuden V' jono (v'_n) *suppenee pisteittäin kohti funktio-naalia* $v'_0 \in V'$, jos $v'_n(v) \rightarrow v'_0(v)$ kaikilla $v \in V$.

Tähän listaan voidaan lisätä nyt heikko suppeneminen.

Määritelmä 13.2. Olkoon V normiavaruus ja V' sen duaali.

- (1) Avaruuden V jono (v_n) *suppenee heikosti kohti vektoria* $v_0 \in V$, jos $v'(v_n) \rightarrow v'(v_0)$ kaikilla $v' \in V'$.

Heikkoa suppenemista merkitään yleensä $v_n \rightharpoonup v_0$. (L^AT_EX:ssa \rightharpoonup.)

Tehtävä 13.1. Osoita, että äärellisulotteisessa tilanteessa heikko suppeneminen on sama kuin normin suhteen suppeneminen.

Tehtävä 13.2. Osoita, että jos Banachin avaruuden jono (v_n) suppenee heikosti kohti vektoria v_0 , niin $v_0 \in \overline{\langle \{v_n | n \in \mathbb{N}\} \rangle}$.

Esimerkki 13.3. Huomaa, että avaruudessa L^p , $p \neq 1, \infty$, jono f_n suppenee heikosti jos ja vain jos

$$\int f_n g \rightarrow \int f_0 g$$

kaikilla $g \in L^q$.

Tehtävä 13.3. Jos jono (v_n) suppenee kohti vektoria v_0 , niin se suppenee heikosti kohti vektoria v_0 .

Tehtävä 13.4. Osoita, että jos jono (v_n) suppenee heikosti kohti vektoria v_0 , niin $\|v_0\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|v_k\|$.

Tehtävä 13.5. Olkoon $(v^n)_{n=1}^\infty$ jono avaruudessa ℓ^p , $p > 1$, s.e.

$$v_k^n = \begin{cases} 1, & \text{kun } n = k, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Osoita, että tämä jono suppenee heikosti, mutta ei normin suhteen, kohti nollajonoa. Tässä tehtävässä saa käyttää tietoa, että $(L^p)' = L^q$, missä $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Esimerkki 13.4. Avaruudella ℓ^1 on *Schurin ominaisuus*, eli heikko ja vahva suppeneminen ovat sama asia.

Tehtävä 13.6. Todista, että jos jono (v_n) suppenee heikosti kohti sekä vektoria w_1 että vektoria w_2 , niin $w_1 = w_2$. (Toisinsanoen, heikon suppenemisen raja-arvot ovat yksikäsitteisiä.)

(Vihje: Hahn-Banachin lause.)

Tehtävä 13.7. Olkoot V ja W Banachin avaruuksia ja $T: V \rightarrow W$ rajoitettu operaattori. Osoita, että jos (v_n) on heikosti suppeneva jono avaruudessa V , niin $T(v_n)$ muodostaa heikosti suppenevan jonon avaruudessa W .

Määritelmä 13.5. Normiavaruuden V *heikko topologia* on se topologia, jonka määrää heikko suppeneminen. Tämä voidaan ilmaista monella eri tavalla:

- Määritellään, että joukko on suljettu jos se sisältää heikosti suppenevien jonojensa raja-arvot, ja sanotaan että joukko on avoin jos sen komplementti on suljettu.
- Heikko topologia on kuvausperheen V' indusoima topologia.
- Heikko topologia on karkein topologia, jonka suhteen jokainen kuvaus $f \in V'$ on jatkuva.

Ylläolevaa topologista määritelmää ei tarvitse sisäistää, mutta kannattaa pitää mielessä että heikon topologian enempi tutkiminen vie nopeasti yleisemmän topologian vesille.

Määritelmä 13.6. Normiavaruus V on *refleksiivinen*, mikäli kanoninen upotus

$$\iota: V \rightarrow V'', \quad (\iota(v))(f) = f(v)$$

on isometria.^a

^aTässä oli aikaisemmin määriteltynä virhe, sillä väitettiin että refleksiivisyyteen riittää olla isometrinen biduaalinsa kanssa *jonkin* isometrian suhteen. Tämä ei ole totta, refleksiivisyyden määritelmä on ylläoleva asia, eivätkä eri määritelmät ole yhtäpitäviä. Kts. esim. Jamesin avaruus https://en.wikipedia.org/wiki/James%27_space

Tehtävä 13.8. Osoita, että Banachin avaruus on refleksiivinen jos ja vain jos sen duaali on refleksiivinen.

Lause 13.7. *Olkoon V refleksiivinen Banachin avaruus. Tällöin jokaisella rajoitetulla jonolla on heikosti suppeneva osajono.*

Todistus. Todistetaan seuraavissa tehtävissä 13.9–13.13, ensin tilanteessa missä V on separoituva. Yleinen tapaus tehdään luennolla, perustuu siihen että annetulla jonolla (v_n) aliavaruus $\overline{\{v_n | n \in \mathbb{N}\}}$ on suljettu separoituva refleksiivinen aliavaruus. $\square$

Tehtävä 13.9. Lauseen 13.7 tilanteessa, osoita että jos V on separoituva, niin niin on myös V'' .

(Vihje: refleksiivisyys ja Lause 4.12.)

Tehtävä 13.10. Äskeisen tehtävän tilanteessa, valitse tiheä numeroituva kokoelma $L_k \in V'$ ja osoita, että jokaisella rajoitetulla jonolla (v_n) avaruudessa V on osajono (w_i) s.e. $(L_k(w_i))_{i=1}^\infty$ suppenee kaikilla i .

(Vihje: diagonaaliargumentti.)

Tehtävä 13.11. Äskeisen tehtävän tilanteessa, osoita että $(L(w_i))$ suppenee kaikilla $L \in V'$.

(Vihje: approksimoi funktionaalia L tiheän joukon muodostavilla funktionaaleilla L_k .)

Tehtävä 13.12. Äskeisen tehtävän tilanteessa, osoita että kuvaus

$$T: V' \rightarrow \mathbb{K}, \quad T(L) = \lim_{k \rightarrow \infty} L(w_k)$$

on rajoitettu lineaarikuvaus, eli $T \in V''$.

Tehtävä 13.13. Äskeisen tehtävän tilanteessa, osoita että jono (w_k) suppenee heikosti vektoriin $\iota^{-1}(T) \in V$, missä $\iota: V \rightarrow V''$ on kانونinen upotus refleksiivisyyden määritelmästä ja T edellisen tehtävän funktionaali.

Korollari 13.8. *Olkoon V refleksiivinen Banachin avaruus. Tällöin sen duaalin suljettu yksikkökuula on heikosti kompakti, eli jokaisella sen jonolla on suppeneva osajono. (Vaihtoehtoisesti, kyseinen joukko on kompakti avaruuden heikossa topologiassa.)*

Tehtävä 13.14. Todista Korollari 13.8.

Tehtävä 13.15. Osoita, että refleksiivisen Banachin avaruuden heikko suppeneminen ei ole minkään normin indusoima.

Tehtävä 13.16. Osoita, että Banachin avaruuden kompakti osajoukko on aina heikosti kompakti.

13.1. Pari huomiota heikosta suppenemisestä Hilbertin avaruuksissa.

Tehtävä 13.17. Osoita, että Hilbertin avaruuden yksikkökuula on aina heikosti kompakti.

Lemma 13.9. *Olkoon H Hilbertin avaruus ja (v_n) jono. Tällöin $v_n \rightharpoonup v_0$ jos ja vain jos $\langle v_n, w \rangle \rightarrow \langle v_0, w \rangle$ kaikilla $w \in H$.*

Tehtävä 13.18. Todista Lemma 13.9.

(Vihje: Rieszin esityslause.)

Lause 13.10. *Olkoon H Hilbertin avaruus ja (v_n) jono, joka suppenee heikosti kohti vektoria v_0 . Jos $\|v_n\| \rightarrow \|v_0\|$, niin jono suppenee myös normin suhteen.*

Tehtävä 13.19. Todista Lause 13.10.

(Vihje: Tehtävä 9.9 ja Lemma 13.9.)

Tehtävä 13.20. Olkoon H Hilbertin avaruus ja $\{v_n | n \in \mathbb{N}\}$ sen ortonormaali systeemi. Osoita, että jono (v_n) suppenee heikosti.

(Vihje: Besselin epäyhtälö.)

13.2. Heikolla suppenemisella kikkailusta. Seuraavassa käydään läpi esimerkkiä eräänlaisesta minimointiongelmasta, jossa refleksiivisen avaruuden yksikkökuulan heikkoa kompaktisuutta päästään käyttämään hyödyksi.

Esimerkki 13.11. Tutkitaan minimointiongelmaa avaruudessa $L^2([0, 1], \mathbb{R})$. Halutaan, syystä tai toisesta, osoittaa että on olemassa L^2 -normiltaan minimaalinen funktio $f \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$, jolle pätee

$$\int_0^1 f(t) \cos(2\pi t) dt \geq \pi.$$

Funktioita, joilla ylläoleva ehto pätee on selvästi olemassa, (esim. $1000 \cdot \chi_{[0, \pi/2]}$) joten ongelmana on näyttää että näistä löytyy minimaalinen.

Äkkiseltään ongelma vaikuttaa hankalalta, sillä vaikka voimme löytää kaikilla $\varepsilon > 0$ funktion f_ε jonka normi on alle epsilonin päästä minimistä

$$M := \inf \left\{ \|f\|_2 : \int_0^1 f(t) \cos(2\pi t) dt \geq \pi \right\},$$

emme tiedä suppeneeko näin muodostettu jono. Tehdään se seuraavissa tehtävissä.

Tehtävä 13.21. Esimerkin 13.11 tilanteessa, muodosta jono $f_n \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ s.e. $\|f_n\|_2 \in [M, M + 1/n]$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Tehtävä 13.22. Esimerkin 13.11 tilanteessa, osoita että äsken muodostamasi jono sisältää osajonon joka suppenee heikosti kohti jotakin $f \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$.

Tehtävä 13.23. Esimerkin 13.11 tilanteessa, osoita että äsken muodostamasi osajono suppenee normin mielessä kohti heikkoa raja-arvoaan.

(Vihje: Lause 13.10.)

13.3. Lisää heikkoja ominaisuuksia. Lähes jokaisesta topologisesta ominaisuudesta voidaan muodostaa heikko versio. Helpoin tapa on vain sanoa, että avaruudella tai kuvauksella on ominaisuus P , mikäli tämä ominaisuus on voimassa kun avaruus varustetaan heikolla topologialla. (Esimerkiksi heikko kompaktisuus.) Vastaavasti voitaisiin määritellä myös heikko rajoittuneisuus tai heikko separoituvuus.

On kuitenkin ominaisuuksia, jotka eivät ole puhtaasti topologisia, kuten täydellisyys, jolloin heikon ominaisuuden määrittely vaatii hie-
man käsityötä.

Määritelmä 13.12. Olkoon V normiavaruus ja (v_n) jono. Sanomme, että jono (v_n) on *heikko Cauchyn jono*, mikäli skalaarijono $(v'(v_n))$ on Cauchyn jono kaikilla $v' \in V$.

Normiavaruus on *heikosti täydellinen*, mikäli jokainen heikko Cauchyn jono suppenee heikosti.

Lause 13.13. *Jokainen refleksiivinen avaruus on heikosti täydellinen.*

Tehtävä 13.24. Todista edellinen lause.

(Vihje: osoita ensin, että heikosti Cauchyn jono on rajoitettu, käytä sitten suljetun kuulan heikkoa kompaktisuutta.)

LIITE A. MERKINTÖJÄ YMS.

A.1. **Kuvausterminologiaa.** Seuraava termistö ei ole täysin vakiintunutta matemaattisessa yhteisössä, eikä sitä tarvitse käyttää kurssilla juuri näin, mutta materiaaleissa pyritään konsistenttiin ilmaisuun.

- *Kuvaus* (eng. *mapping*) on sateenvarjotermi kaikille muille.
- *Funktio* (eng. *function*) on kuvaus $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, missä I on jokin reaalilukujen osajoukko. Esimerkiksi $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin(x)$ tai $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$ ovat funktioita.
- *Operaattori* (eng. *operator*) on lineaarikuvaus kahden (yleensä ääretönulotteisen) vektoriavaruuden välillä. Esimerkiksi $D: C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), D(f) = f'$ on operaattori.
- *Funktionaali* (eng. *functional*) on lineaarikuvaus (yleensä ääretönulotteiselta) vektoriavaruudelta reaaliluvuille. Esimerkiksi $E: C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, E(f) = f(0)$ on funktionaali.

A.2. Kuvausjoukkoja.

$$\mathcal{F}(A, B) = \{f: A \rightarrow B\}$$

Ellei muuten mainita, niin joukko $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ oletetaan aina varustetuksi laskutoimituksilla

$$\begin{aligned} f + g: A \rightarrow \mathbb{K}, \quad (f + g)(x) &= f(x) + g(x), \\ ah: A \rightarrow \mathbb{K}, \quad (ah)(x) &= ah(x), \end{aligned}$$

kun $f, g, h: A \rightarrow \mathbb{K}$ ja $a \in \mathbb{K}$.

$$C^0(A, B) = \{f: A \rightarrow B \mid f \text{ on jatkuva}\}$$

$$C^1(A, B) = \{f: A \rightarrow B \mid f \text{ on derivoituva ja } f' \in C^0(A, B)\}$$

$$C^{n+1}(A, B) = \{f: A \rightarrow B \mid f \text{ on derivoituva ja } f' \in C^n(A, B)\}$$

$$P(A, B) = \{f: A \rightarrow B \mid f \text{ on polynomi}\}$$

$$P^n(A, B) = \{f: A \rightarrow B \mid f \text{ on polynomi ja } \deg(f) \leq n\}$$

$$L(V, W) = \{T: V \rightarrow W \mid T \text{ on lineaarinen}\}$$

A.3. Jonoavaruuksia.

$$\ell_0(V) = \{(x_j) \mid x_j \in X, \lim_j x_j = \mathbf{0}_V\}$$

$$\ell_\infty(V) = \{(x_j) \mid x_j \in X, \sup_j \|x_j\|_V < \infty\}$$

A.4. Normeja sekä seminormeja.**LIITE B. ALGEBRAN JA METRISEN TOPOLOGIAN MÄÄRITELMIÄ****B.1. Algebraa.**

Määritelmä B.1. *Ryhmä* on kolmikko $(G, +, e)$, jolle pätee

- (1) $a + b \in G$ kaikilla $a, b \in G$,
 - (2) $a + (b + c) = (a + b) + c$ kaikilla $a, b, c \in G$,
 - (3) $a + e = e + a = a$ kaikilla $a \in G$, ja
 - (4) kaikilla $a \in G$ on olemassa $b \in G$ siten, että $a + b = b + a = e$.
- Ryhmä on *vaihdannainen* mikäli $a + b = b + a$ kaikilla $a, b \in G$.

Määritelmä B.2. Kunta on vaihdannainen ryhmä $(G, +, 0)$ joka on varustettu myös kertolaskulla jonka suhteen se on myös vaihdannainen ryhmä $(G, \cdot, 1)$ siten, että

- (1) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$,
- (2)
- (3)

B.2. Metrisiä käsitteitä.

Määritelmä B.3. Metrinen avaruus on pari (X, d) , missä *metriikka* d on kuvaus $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ siten, että

- (1) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, x)$ kaikilla $x, y, z \in X$,
- (2) $d(x, y) = d(y, x)$ kaikilla $x, y \in X$, ja
- (3) $d(x, y) = 0$ jos ja vain jos $x = y$.

LIITE C. HIEMAN JOUKKO-OPPIA

Joukko X on

- *äärellinen*, mikäli on olemassa $n \in \mathbb{N}$ ja bijektio $\sigma: \{0, \dots, n\} \rightarrow X$.
- *ääretön*, mikäli on olemassa aito osajoukko $Y \subset X$ sekä bijektio $\sigma: Y \rightarrow X$.
- *numeroituva*, mikäli on olemassa surjektio $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow X$.
- *numeroituvasti ääretön*, mikäli on olemassa bijektio $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow X$.
- *ylinnumeroituva*, mikäli ei ole olemassa surjektiota surjektio $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow X$.

Esimerkki C.1. • Numeroituvia joukkoja: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^n$, kokonaislukukertoimisten polynomien joukko, rationaalilukukertoimisten polynomien joukko.
 • Ylinumeroituvia joukkoja: $\mathbb{R}$, $[0, 1]$, Cantorin joukko, $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $P(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, rationaalilukujonojen joukko.

Määritelmä C.2. Joukot X ja Y ovat *yhtä mahtavia* jos on olemassa bijektio $X \rightarrow Y$. Merkitään $|X| = |Y|$.

Jos joukoille X ja Y pätee, että on olemassa surjektio $Y \rightarrow X$, niin sanotaan että Y on *mahtavampi kuin* X ja merkitään $|X| \leq |Y|$.

Edelleen, jos joukoille X ja Y pätee, että on olemassa surjektio $Y \rightarrow X$ mutta ei injektiota $Y \rightarrow X$, niin sanotaan että Y on *aidosti mahtavampi kuin* X ja merkitään $|X| < |Y|$.

Tehtävä C.1. Onko olemassa joukkoa $X \subset \mathbb{R}$ jolle pätee $|\mathbb{N}| < |X|$ ja $|X| < |\mathbb{R}|$?

(Just kidding, tämä on nk. kontinuumihypoteesi, älä yritä ratkaista.)

Tehtävä C.2. Olkoot A sekä B kaksi joukkoa ja $P(A)$ sekä $P(B)$ niiden potenssijoukot. Osoita, että

- (1) Jos $|A| \leq |B|$, niin $|P(A)| \leq |P(B)|$.
- (2) Jos $|A| < |B|$, niin $|P(A)| < |P(B)|$.

(Just kidding, a-kohta helppo, b-kohta mahdoton.)

Lemma C.3. Olkoon A numeroituva joukko. Tällöin kaikkien joukon A äärellisten osajoukkojen kokoelma on numeroituva.

LIITE D. STONEN JA WEIERSTRASSIN LAUSE

Seuraavassa voi joko ajatella, että $X = [0, 1]$ tai että X on mikä tahansa kompakti metrinen avaruus. Toisaalta, reaalilukujen käyttö kompleksilukujen sijaan on tämän lauseen kohdalla välttämätöntä.⁸ Varustamme avaruuden $C^0(X, \mathbb{R})$ tässä kappaleessa aina sup-normilla.

Määritelmä D.1. Olkoon $B \subset C^0(X, \mathbb{R})$ kokoelma funktiota. Sanomme, että B on *algebra*, jos kaikilla $f, g \in B$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$,

- $f + g \in B$,
- $fg \in B$, ja
- $\lambda f \in B$.

Tässä tulokuvaus $fg \in C^0(X, \mathbb{R})$ määritellään luonnollisesti asettamalla $(fg)(x) = f(x)g(x)$ kaikilla $x \in X$.

Osajoukon $A \subset C^0([0, 1], \mathbb{R})$ *virittämä algebra* on pienin algebra joka sisältää joukon A .

Määritelmä D.2. Olkoon $A \subset C^0(X, \mathbb{R})$ kokoelma funktioita. Sanotaan, että kokoelma A *erottaa lähtöjoukon X pisteet*, mikäli kaikilla $x, y \in X$, $x \neq y$ on olemassa $f \in A$ jolle pätee $f(x) \neq f(y)$.

Lause D.3. Olkoon $A \subset C^0(X, \mathbb{R})$ algebra joka erottaa lähtöjoukon pisteet ja sisältää vakiofunktion $x \mapsto 1$. Tällöin $\overline{A} = C^0(X, \mathbb{R})$.

Todistus. [Fri82, s. 116–118.] □

Korollaari D.4. Olkoon $A \subset C^0(X, \mathbb{R})$ joukko joka erottaa lähtöjoukon pisteet ja sisältää vakiofunktion $x \mapsto 1$. Tällöin joukon A virittämän algebran sulkeuma on $C^0(X, \mathbb{R})$.

⁸Kompleksianalyttikot: muodostakaa joukko johon sisältää vakiofunktion $z \mapsto 1$ ja identtinen kuvaus $z \mapsto z$. Onko näiden kahden kuvauksen virittämän algebran sulkeuma kaikkien jatkuvien kompleksisten kuvausten kokoelma? Mieti erityisesti kompleksikonjugointia.

VIITTEET

- [Cyb89] G. Cybenko. Approximation by superpositions of a sigmoidal function. *Math. Control Signals Systems*, 2(4):303–314, 1989.
- [DS88] Nelson Dunford and Jacob T. Schwartz. *Linear operators. Part I*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988. General theory, With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle, Reprint of the 1958 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [EW17] Manfred Einsiedler and Thomas Ward. *Functional analysis, spectral theory, and applications*, volume 276 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Cham, 2017.
- [Fri82] Avner Friedman. *Foundations of modern analysis*. Dover Publications, Inc., New York, 1982. Reprint of the 1970 original.