

Kukin seuraavasta viidestä tehtävästä on kuuden pisteen arvoinen. Kurssi tehdään kotitenttinä, jossa simuloidaan yleistenttiä. Tee siis tentti käyttämättä mitään materiaaleja. Kun olet valmis, ota koepapereistasi kuva tai skannaus ja palauta sähköpostilla osoitteeseen `rami.m.luisto@jyu.fi`.

Koeaikaa klo 08:00–12:00.

Mikäli tulee epäselvyyksiä, niin ota yhteyttä esimerkiksi etätentin valvojaan tai suoraan minuun sähköpostilla; `rami.m.luisto@jyu.fi`.

1. Olkoon V $\mathbb{K}$ -sisätuloavaruus. Muotoile ja todista Cauchyn epäyhtälö.
2. Määrittele Hamelin kanta, ja osoita että jokaisella vektoriavaruudella on Hamelin kanta.
3. Olkoon H reaalin Hilbertin avaruus.
 - (a) Muotoile Rieszin esityslause avaruudessa H .
 - (b) Todista Rieszin esityslauseen olemassaolo -kohta avaruudessa H .
 - (c) Todista Rieszin esityslauseen yksikäsitteisyys -kohta avaruudessa H .
4.
 - (a) Muotoile ja todista Hahn-Banachin lause.
 - (b) Olkoon V normiavaruus. Osoita, että jokaisella $v \in V$ on olemassa $v' \in V'$ jolle pätee $v'(v) = \|v\|_V$ ja $\|v'\|_{V'} = 1$.
5. Määrittele heikko suppeneminen ja todista että jokainen Hilbertin avaruuden ortonormaali systeemi suppenee heikosti, mutta ei normin mielessä. Tässä tehtävässä saa käyttää kurssilla todistettuja tuloksia.