

HARJOITUSTENTTI ENSIMMÄISEEN VÄLIKOEKEESEEN

Kukin seuraavasta viidestä tehtävästä on kuuden pisteen arvoinen.
Koeaikaa on neljä tuntia.

- (1) Olkoon $C^1([0, 1], \mathbb{R})$ kaikkien jatkuvasti derivoituvien funktioiden $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ muodostama vektoriavaruus. Osoita, että normit $\|f\|_{1,\infty} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ ja $\|f\|_\infty$ eivät ole ekvivalentteja normeja.

- (2) Osoita, että kuvaus

$$L: C^0([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow C^0([0, 1], \mathbb{R}), \quad L(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$$

on rajoitettu lineaarikuvaus kun sekä lähtö että maali varustetaan normilla $\|\cdot\|_\infty$.

Onko kuvaus L injektio tai surjektio?

- (3) Osoita, että kaikkien polynomien $p: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ avaruus $P([0, 1], \mathbb{R})$ varustettuna sup-normilla $\|\cdot\|_\infty$

- (a) on separoituva, mutta
(b) ei täydellinen normiavaruus.

- (4) Olkoon $L: V \rightarrow W$ injektiivinen rajoitettu lineaarikuvaus kahden Banachin avaruuden välillä. Osoita, että jos jollain $c > 0$ pätee, että $\|L(v)\| \geq c\|v\|$ kaikilla $v \in V$, niin $T(V)$ on suljettu aliavaruus.

- (5) Määritellään kuvaus

$$T: L^1([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow (L^\infty([0, 1], \mathbb{R}))', \quad (Tg)f = \int_I fg.$$

- (a) Osoita, että T on hyvinmääritelty lineaarikuvaus.
(b) Osoita, että T rajoitettu lineaarikuvaus.
(c) Osoita, että kuvaukselle T pätee $\|T(v)\| = \|v\|$ kaikilla $v \in L^1$.