

MATS220 – Funktionaalianalyysi K2020.
Toinen välikoe – Harjoitustentti
Tentaattori: Rami Luisto

Tämä on harjoitustentti, mutta varsinaisessa tentissä tulee lukemaan suunnilleen seuraavaa:

Kukin seuraavasta viidestä tehtävästä on kuuden pisteen arvoinen. Kurssi tehdään kotitenttinä, jossa simuloidaan yleistenttiä. Tee siis tentti käyttämättä mitään materiaaleja. Kun olet valmis, ota koepapereistasi kuva tai skannaus ja palauta Moodlen tenttipalautus -osioon. Koeaikaa klo 08:00–16:00.

1. Osoita, että kuvaus

$$S: V \times V \rightarrow [-\infty, \infty], \quad S((x_n), (y_n)) = \sum_n x_n y_n$$

- (a) määrittelee sisätulon kun $V = \ell^2(\mathbb{R})$, mutta
(b) ei määrittele sisätuloa kun $V = \ell^\infty(\mathbb{R})$.

2. Olkoon H Hilbertin avaruus. Osoita, että Hilbertin avaruuden H ortonormaali systeemi E on ortonormaali kanta jos ja vain jos $\overline{\langle E \rangle} = H$.

3. Olkoon H Hilbertin avaruus.

- (a) Todista, että jos $L: H \rightarrow \mathbb{K}$ on lineaarikuvaus, niin $L(v)w - L(w)v \in \ker(L)$ kaikilla $v, w \in H$.
(b) Todista seuraava versio Rieszin lauseesta: *Kaikilla $v' \in H'$ on olemassa $v \in H$ s.e. $v'(w) = \langle w, v \rangle$ kaikilla $w \in H$.*

4. Olkoon V Banachin avaruus ja $T: V \rightarrow V$ lineaarikuvaus.

- (a) Määrittele mitä tarkoittaa operaattorin T kompaktisuus.
(b) Oletetaan, että T on kompakti. Osoita, että $\{0\} \in \text{spec}(T)$.

5. Olkoon V Banachin avaruus ja (v_n) sen jono.

- (a) Määrittele jonon (v_n) heikko suppeneminen.
(b) Anna esimerkki normiavaruudesta ja sen jonosta, joka suppenee heikosti muttei vahvasti.



Riesz and Hilbert believe in you!