

JY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
MATA2500 Informaatioteoria, Syksy 2019
Harjoitus 1 – Ratkaisuehdotuksia

Tämän viikon demoissa keskitytään todennäköisyyslaskennan siihen puoleen, jota jatkossa kovasti tarvitsemme.

1. Olet valinnut korttipakasta pelikortin umpimähkään. Miten monta bittiä informaatiota sinun pitää välittää jotta voit kertoa korttisi...

- (a) Värin?
- (b) Maan?
- (c) Arvon?

Ratkaisu:

- (a) Kortin värin kertominen (musta tai punainen) kumpikin puolittaa mahdollisuuksien määrän. Saadaan

$$h\left(\frac{26}{52}\right) = h\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2(2) = 1.$$

Informaatiota siis välittyy yksi bitti.

- (b) Kortin maan kertominen (pata, ruutu, hertta, risti) antaa bittejä

$$h\left(\frac{13}{52}\right) = h\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2(4) = 2.$$

Informaatiota siis välittyy kaksi bittiä.

- (c) Kortin arvon $(A, 1, \dots, 10, J, R, K)$ kertominen määrää jonkin neljästä senarvoisesta pakan kortista. Saadaan siis

$$h\left(\frac{4}{52}\right) = h\left(\frac{1}{13}\right) = \log_2(13) \approx 3.7.$$

Informaatiota siis välittyy siis noin 3.7 bittiä.

Täsmällisen kortin kertominen puolestaan antaisi informaatiota

$$h\left(\frac{1}{52}\right) = \log_2(52) \approx 5.7.$$

2. Luennoitsija käy joka päivä lounaalla joko Maijassa, Piatossa tai Ilokivessä. Hänen todennäköisyytensä käydä Maijassa on $p_M = 0.5$, todennäköisyytensä käydä Piatossa on $p_P = 0.4$ ja todennäköisyytensä käydä Ilokivessä on $p_I = 0.1$.

Maijassa käydessään hän syö kasvislounaan todennäköisyydellä 0.8 ja lihalounaan todennäköisyydellä 0.2. Piatossa käydessään hän syö kasvislounaan todennäköisyydellä 0.7 ja lihalounaan todennäköisyydellä 0.3. Ilokivessä käydessään hän syö kasvislounaan todennäköisyydellä 0.1 ja lihalounaan todennäköisyydellä 0.9.

- (a) Muodosta todennäköisyysjakaumat lounaspaikan valinnalle ja ruokavalion valinnalle. Muodosta näiden yhteisjakauma ja laske kunkin kolmen jakauman entropia. (Kannattaa piirtää 'puukuva'.)

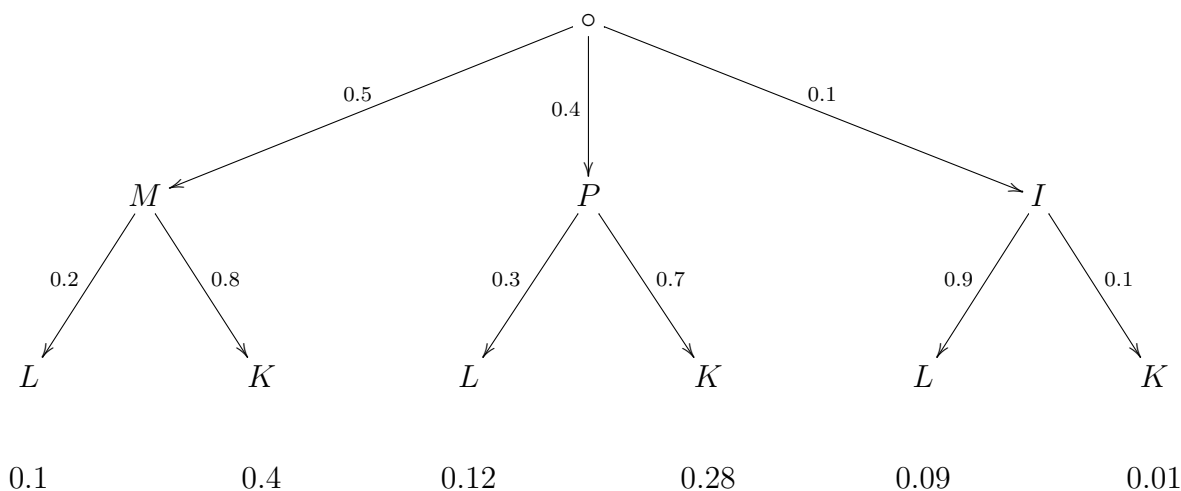
- (b) Kasvislounas maksaa joka ravintolassa 5 euroa ja lihalounas 7 euroa. Olkoon X satunnaismuuttuja joka kuvaa lounaan hintaa. Muodosta satunnaismuuttujan X odotusarvo.
- (c) Luennoitsija mainitsee syöneensä eilen lihalounaan. Mikä on tämän paljastuksen informaation sisältö $h(p)$? Millä todennäköisyydellä hän oli eilen syömässä Ilokivessä? Paljonko informaatiota hän paljastaa mikäli hän kertoo tänään menneensä Ilokiveen?

Ratkaisu:

Huomaa, että tilanteesta kyse on yhteisjakaumasta (S, R) , missä $S = \{\text{Maija, Piato, Ilokivi}\}$ ja $R = \{\text{Liha, Kasvis}\}$. Tehtäviä varten ei tarvitse kirjoittaa ylös kaikkia tämän yhteisjakauman arvoja, mutta mikäli missään kohtaa hämmentää, niin kannattaa näin tehdä. Varmuuden vuoksi kirjoitettuna tilanne näyttää seuraavalta:

	Maija	Piato	Ilokivi	MarginaaliTN
L	0.1	0.12	0.09	0.31
K	0.4	0.28	0.01	0.69
MarginaaliTN	0.5	0.4	0.1	

- (a) Kuva tilanteesta on tässä. Kunkin puun lehden alle on kirjattu tapahtuman todennäköisyys.



Lasketaan yhteisjakauman (S, R) sekä marginaalijakaumien R ja S entropiat.

$$\begin{aligned}
 H(S, R) &= -0.1 \log_2(0.1) - 0.12 \log_2(0.12) - 0.09 \log_2(0.09) \\
 &\quad - 0.4 \log_2(0.4) - 0.28 \log_2(0.28) - 0.01 \log_2(0.01) \\
 &\approx 2.12
 \end{aligned}$$

$$H(S) = -0.5 \log_2(0.5) - 0.4 \log_2(0.4) - 0.1 \log_2(0.1) \approx 1.36$$

$$H(R) = -0.31 \log_2(0.31) - 0.69 \log_2(0.69) \approx 0.89$$

- (b) Satunnaismuuttujan X voi määrittää joko yhteisjakaumaan (R, S) tai pelkästään ruokavaihtoehtomarginaalijakaumaan S . (Kumpikin määrittäminen antaa saman odotusarvon). Luontevinta se on määrittää jakaumaan S asettamalla $X(\text{Liha}) = 7$, $X(\text{Kasvis}) = 5$. Tällöin odotusarvoksi saadaan

$$E[X] = P(X = \text{Liha})X(\text{Liha}) + P(X = \text{Kasvis})X(\text{Kasvis}) = 0.31 \cdot 7 + 0.69 \cdot 5 \approx 5.62.$$

Satunnaismuuttujan odotusarvo on siis 5.62 euroa.

- (c) Marginaalitodennäköisyys tapahtumalle $S = \text{Liha}$ on 0.31, joten informaatiosisältö on

$$h(0.31) = -\log_2(0.31) \approx 1.69.$$

Bayesin kaavan nojalla

$$\begin{aligned} P(R = \text{Ilokivi} | S = \text{Liha}) &= \frac{P(S = \text{Liha} | R = \text{Ilokivi})P(R = \text{Ilokivi})}{P(S = \text{Liha})} \\ &= \frac{0.9 \cdot 0.1}{0.31} \approx 0.29. \end{aligned}$$

Lopulta lasketaan

$$h(R = \text{Ilokivi}) = -\log_2(0.1) \approx 3.32.$$

3. Luennoilla esiintyneistä 16:a lapusta puolet olivat sinisiä. (Ja tasan yhden takana piilossa hymiö.) Kun saimme tietää että hymiö ei ole sinisen lapun takana, saimme yhden bitin verran informaatiota, sillä $-\log_2(8/16) = 1$. Vaihtoehtoinen viesti “hymiö ei ole lapun 2 takana” olisi antanut meille vain $-\log_2(15/16) \approx 0.09$ bitin verran informaatiota.

- (a) Esität laput opiskelijatoverillesi, ja rupeat kääntämään sinisiä lappuja yksi kerrallaan ympäri. Kuinka monta bittiä informaatiota hän oppii erikseen kustakin kahdeksasta käännöksestä? (Kohtelee jokaista tapahtumaa erillisenä tapahtumana jossa toverisi näkee n lappua ja oppii että yhden takana ei ole hymiötä.) Paljon informaatiota hän oppii yhteensä kaikkien käännösten jälkeen?
- (b) Vertaa informaatiomäärää jos taikuri paljastaa valitsemansa pelikortin joko suoraan tai kertomalla 51 kertaa “tämä ei ole valitsemani kortti”.

Ratkaisu:

- (a) Kun kortteja aletaan poistamaan yksi kerrallaan, “ei tämä, eikä tämä, eikä tämä...” niin informaatiota kertyy

$$\begin{aligned} &h\left(\frac{15}{16}\right) + h\left(\frac{14}{15}\right) + h\left(\frac{13}{14}\right) + \dots + h\left(\frac{9}{10}\right) + h\left(\frac{8}{9}\right) \\ &= -\log\left(\frac{15}{16}\right) - \log\left(\frac{14}{15}\right) - \log\left(\frac{13}{14}\right) - \dots - \log\left(\frac{9}{10}\right) - \log\left(\frac{8}{9}\right) \\ &= -\log(16) + \log(15) - \log(15) + \log(14) - \dots - \log(9) + \log(10) - \log(8) + \log(9) \\ &= +\log(16) - \log(8) = -\log\left(\frac{8}{16}\right) = 1. \end{aligned}$$

Eli sama määrä kuin suoralla paljastuksella.

- (b) Kuten aiemmin mainittiin, niin yhden kortin paljastaminen antaa informaatiota

$$h\left(\frac{1}{52}\right) = \log_2(52) \approx 5.7.$$

Jos kortteja aletaan poistamaan yksi kerrallaan, “ei tämä, eikä tämä, eikä tämä...” niin informaatiota kertyy

$$\begin{aligned} & h\left(\frac{51}{52}\right) + h\left(\frac{50}{51}\right) + h\left(\frac{49}{50}\right) + \dots + h\left(\frac{2}{3}\right) + h\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= -\log\left(\frac{51}{52}\right) - \log\left(\frac{50}{51}\right) - \log\left(\frac{49}{50}\right) - \dots - \log\left(\frac{2}{3}\right) - \log\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= -\log(51) + \log(52) - \log(50) + \log(51) - \dots - \log(2) + \log(3) - \log(2) + \log(1) \\ &= +\log(52) - \log(1) = \log(52) \approx 5.7. \end{aligned}$$

Eli sama määrä kuin suoralla paljastuksella.

Syventävät tehtävät

Seuraavat tehtävät palautetaan kirjallisina harjoitusten pitäjälle, kurssin palautuslokeroon tai sähköpostitse. Deadline 6.11.2019 klo 08.15. **Aikaisemmassa versiossa oli väärä päivämäärä, piti olla 5.11. klo 8.15 kun ekat demot alkaa, mutta pidetään DL alkuperäisessä koska minun moka.**

4. Todista, alempana mainittua Jensenin epäyhtälöä käyttäen, *Gibbsin epäyhtälö*: Kahdelle samassa joukossa määritetylle äärelliselle todennäköisyysjakaumalle P ja Q pätee

$$\sum_x P(x) \log \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right) \geq 0.$$

(Vihje: Todistus on lyhyt kunhan löydät oikean funktion johon Jensenin epäyhtälöä kannattaa soveltaa.)

Ratkaisu: Asetetaan $f(x) = \log(1/x)$. Tämä funktio on konvekssi, joka nähdään joko kuvaajasta tai käyttäen calculus/JMA -tietoja jotka sanovat että funktio jolla $f''(x) \geq 0$ kaikilla x on konvekssi. Nyt Jensenin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} \sum_x P(x) \log_2 \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right) &= -\sum_x P(x) \log_2 \left(\frac{Q(x)}{P(x)} \right) \\ &= -\sum_x P(x) f \left(\frac{Q(x)}{P(x)} \right) \\ &\geq -f \left(\sum_x P(x) \frac{Q(x)}{P(x)} \right) \\ &= -\log_2 \left(\sum_x Q(x) \right) \\ &= -\log_2(1) = 0. \end{aligned}$$

5. Sirpa-Petteri ja Saku-Maija suorittavat seuraavanlaisen operaation.

Naapurihuoneessa on viisi identtistä kangaspussia, joissa kussakin on neljä palloa. Yhdessä ruukussa on pelkästään mustia palloja, toisessa yksi valkoinen ja kolme mustaa, kolmannessa kaksi valkoista ja kaksi mustaa, jne.

Sirpa-Petteri menee naapurihuoneeseen ja valitsee umpimähkään yhden pusseista. Hän poimii pussista umpimähkään pallon, katsoo sen värin, pistää takaisin pussiin ja ravistaa pussin sisällön sekaisin. Sitten hän toistaa toimenpiteen kolmesti, eli hän on tehnyt neljä nostoa pussista.

Sirpa-Petteri palaa Saku-Maijan luo ja kertoo että nosti umpimähkäisesti pussista kolme mustaa ja yhden valkoisen pallon.

- (a) Mikä on todennäköisyys sille, että Sirpa-Petteri oli valinnut pussin jossa on 2 mustaa ja 2 valkoista palloa?
- (b) Olkoon X satunnaismuuttuja "Sirpa-Petterin valitsemassa pussissa olleiden valkoisten pallojen lukumäärä". Muodosta jakauma

$$P(X = k | \text{Sirpa-Petteri sai 3 mustaa ja yhden valkoisen pallon}).$$

- (c) Fiilistele miten tehtävä liittyy siihen, että heität kolikkoa kolmesti saaden kolme klaavaa ja yhden kruunan, jonka jälkeen pohdit miten vahvasti uskot että kolikko ei ole painotettu.

Vihje: Bayesin kaava sanoo, että

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}.$$

Ratkaisu: Merkitään A = "nostettiin 3 mustaa- ja 1 valkoinen pallo" sekä B_i = "Valittiin pussi jossa on i kpl valkoista palloa", $i = 0, \dots, 4$.

- (a) Huomataan alkuun että $P(B_i) = \frac{1}{5}$ kaikilla i , ja

$$P(A|B_i) = \begin{cases} 0, & \text{kun } i = 0 \\ \binom{4}{1} \left(\frac{3}{4}\right)^1 \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}, & \text{kun } i = 1 \\ \binom{4}{1} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{4}{16}, & \text{kun } i = 2 \\ \binom{4}{1} \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{3}{64}, & \text{kun } i = 3 \\ 0, & \text{kun } i = 4. \end{cases}$$

Erityisesti

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_i P(A, B_i) = \sum_i P(B_i)P(A|B_i) \\ &= \frac{1}{5} \sum_i P(A|B_i) = \frac{1}{5} \left(\frac{27}{64} + \frac{16}{64} + \frac{3}{64} \right) = \frac{46}{5 \cdot 64}. \end{aligned}$$

Edelleen

$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{16} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{46}{5 \cdot 64}} = \frac{8}{23}.$$

- (b) Kuten yllä, lasketaan muutkin todennäköisyydet $P(B_i|A)$ ja saadaan

$$P(B_i|A) = \begin{cases} 0, & \text{kun } i = 0 \\ \frac{27}{46} & \text{kun } i = 1 \\ \frac{16}{46} & \text{kun } i = 2 \\ \frac{3}{46} & \text{kun } i = 3 \\ 0, & \text{kun } i = 4. \end{cases}$$

Tässä kohtaa voi tehdä lyhyen tarkistuslaskennan, ja huomaa että tämä jakauma summautuu ykköseksi kuten kuuluukiin.

- (c) Fiilistellä voi esim sitä, että jos pussien määrää kasvattaa paljon, niin päästään lähemmäs ja lähemmäs jatkuvaa jakaumaa jolla voisi kuvata painotetun kolikon mahdollisista vääristymää.

6. Todista seuraava versio *Jensenin epäyhtälöstä*: Olkoon $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ konvekssi funktio, eli millä tahansa $x_1, x_2 \in (a, b)$ pätee

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

kaikilla $\lambda \in [0, 1]$. Tällöin mikäli $p_1, \dots, p_n > 0$ ovat lukuja joille pätee $\sum_j p_j = 1$, niin

$$f\left(\sum_{j=1}^n p_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^n p_j f(x_j).$$

Vihje: kirjoita ensin $\lambda = p_1 = p_1/(\sum_{j=1}^n p_j)$. Tee jotain ovelaa. Kirjoita sitten $\lambda = p_2/(\sum_{j=2}^n p_j)$. Tee lisää ovelaa. Jatka hyvää rataa.

Ratkaisu:

Todistus onnistuu aika helposti esimerkiksi induktiolla jos haluaa tehdä formaalilla tarkkuudella.

Voi tehdä myös seuraavalla tavalla, missä merkitsemme $S_k = \sum_{j=k}^n$:

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{j=1}^k p_j x_j\right) &= f\left(p_1 x_1 + \sum_{j=2}^k p_j x_j\right) \\ &\leq p_1 f(x_1) + S_2 f\left(\left(\sum_{j=2}^n p_j x_j\right)/S_2\right) \\ &= p_1 f(x_1) + S_2 f\left(\left(\sum_{j=2}^n p_j x_j\right)/S_2\right) \\ &= p_1 f(x_1) + S_2 \frac{p_2}{S_2} f(x_2) + \frac{S_3}{S_2} f\left(\left(\sum_{j=3}^n p_j x_j\right)/S_3\right) \\ &\dots \\ &= p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \dots + p_n f(x_n). \end{aligned}$$