

JY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
MATA2500 Informaatioteoria, Syksy 2019
Harjoitus 5 – Ratkaisuehdotteita

Tämän viikon demoissa puhutaan kohinaisista kanavista.

1. Laske symmetrisen ε -kohinaisen binäärikanavan kapasiteetti.

(*Vihje: Saat käyttää tietoa, että tasajakauma maksimoi entropian. Kannattaa käyttää kaavaa $I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$.*) *Ratkaisu:*

Olkoon $X = ((0, 1), (p_0, p_1))$. Tämä muodostaa symmetrisen ε -kohinaisen kanavan kanssa kanavajakauman

	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = 0$	$p_0(1 - \varepsilon)$	$p_0\varepsilon$
$X = 1$	$p_1\varepsilon$	$p_1(1 - \varepsilon)$.

Nyt lasketaan, että

$$\begin{aligned}
 I(X;Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\
 &= H(p_0(1 - \varepsilon) + p_1\varepsilon, p_1(1 - \varepsilon) + p_0\varepsilon) - \sum_{a=0,1} P(X = a)H(Y|X = a) \\
 &= H(p_0(1 - \varepsilon) + p_1\varepsilon, p_1(1 - \varepsilon) + p_0\varepsilon) - p_0H(\varepsilon, 1 - \varepsilon) - p_1H(\varepsilon, 1 - \varepsilon) \\
 &= H(p_0(1 - \varepsilon) + p_1\varepsilon, p_1(1 - \varepsilon) + p_0\varepsilon) - H(\varepsilon, 1 - \varepsilon).
 \end{aligned}$$

Tämän erotuksen jälkimmäinen termi on epsilonista riippuva vakio, joten kapasiteetti maksimoidaan kun ensimmäinen termi on maksimissaan. (Ja kaikilla ε löytyy p_0 s.e. $p_0(1 - \varepsilon) + p_1\varepsilon = 0.5$.) Kahden alkion jakauman entropian maksimoi tasajakauma, jonka entropia on 1. Täten saadaan, että

$$\text{Cap}(Y) = 1 - H(\varepsilon, 1 - \varepsilon).$$

Erityisesti huomataan, että kun $\varepsilon = 0$, niin yhteisinformaatio on maksimissaan eli 1, kun taas jos $\varepsilon = 0.5$, niin yhteisinformaatio on nolla, eli kanavalla ei voi välittää informaatiota.

2. Tutkitaan ε -kohinaista Z -kanavaa, kun $\varepsilon = 0.25$. Oletetaan, että kanavan sisääntulojakauma on $\{(0, 1), (p_0, p_1)\}$. Laske kanavan yhteisinformaatio kun

- (a) $p_0 = 0.5$,
- (b) $p_0 = 0.43$, tai
- (c) $p_0 = 0.57$.

Yllättääkö tulos sinua?

Ratkaisu:

Olkoon $X = ((0, 1), (p_0, p_1))$. Tämä muodostaa ε -kohinaisen Z-jakauman kanssa kanavajakauman

	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = 0$	p_0	0ε
$X = 1$	$p_1\varepsilon$	$p_1(1 - \varepsilon)$.

Erityisesti huomataan, että marginaalijakauma Y on muotoa $(p_0 + p_1\varepsilon, p_1(1 - \varepsilon))$. Lasketaan

$$\begin{aligned}
 I(X; Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\
 &= H(Y) - \sum_{x=0,1} P(X=x)H(Y|X=x) \\
 &= H(p_0 + 0.25p_1, 0.75p_1) - p_0H(1, 0) - p_1H\left(\frac{0.25p_1}{p_1}, \frac{0.75p_1}{p_1}\right) \\
 &= H(p_0 + 0.25p_1, 0.75p_1) - p_1H(0.25p_1, 0.75p_1)
 \end{aligned}$$

Tästä saadaan numeerisiksi arvoiksi

- (a) $I(X; Y) = 0.549$, kun $p_0 = 0.5$,
- (b) $I(X; Y) = 0.525$, kun $p_0 = 0.43$ ja
- (c) $I(X; Y) = 0.556$, kun $p_0 = 5.7$.

Nähdään siis, että maksimikapasiteettia ei saavuteta tasajakaumalla! Yhteisinformaation määrä todennäköisyyden p_0 funktiona on plotattu Kuvassa 1, josta silmä­määräisesti nähdään, että maksimi on jossain 0.6:n kohdalla. Kanavalla siis “kannattaa suosia” nollien lähettämistä koska ne välittyvät aina virheettömästi.

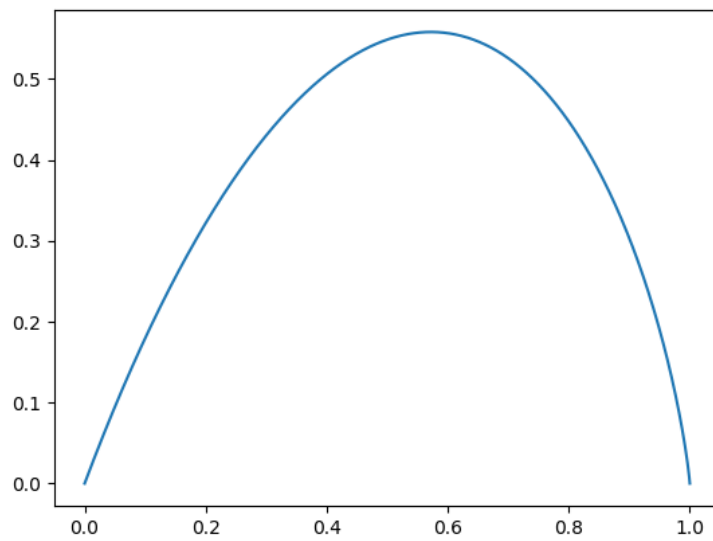
3. Tutkitaan (7, 4)-Hammingin koodia.

- (a) Muodosta syötteen 1100 Hammingin (7, 4)-koodi.
- (b) Pura saapunut viesti 0001101.
- (c) Muodosta syötteen 1111 Hammingin (7, 4)-koodi. Tutki miltä purettu viesti näyttää jos kohina on tuottanut viestiin kaksi virhettä.

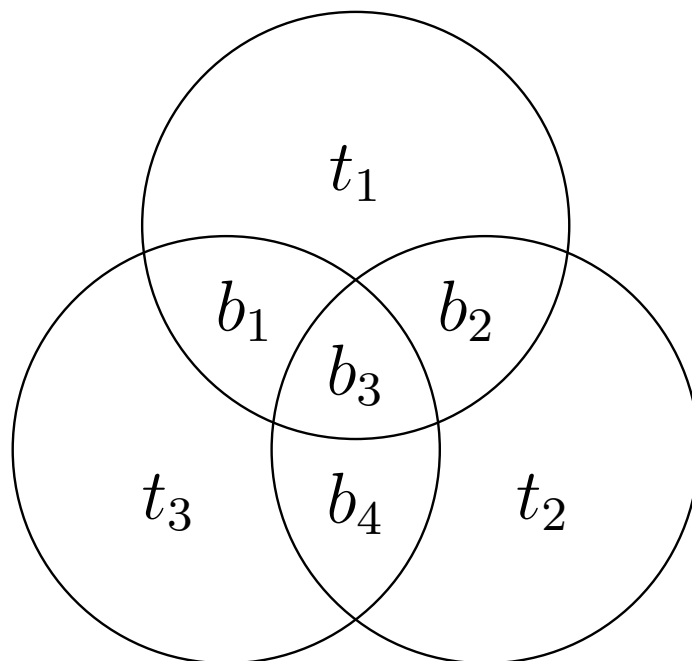
Ratkaisu:

Muistetaan, että Hammingin koodin määrittelypallokonfiguraatio näyttää seuraavalta:

- (a) 1100011
- (b) Hamming tunnistaa bitissä kaksi syntyneen virheen, ja korjaa vastaanotetuksi viestiksi 0101.
- (c) Kahden virheen syntyminen lähetyksessä ei enää korjaannu. Pahimmillaan kahden virheen synnyttyä Hammingin koodi “korjaa” viestiä väärään suuntaan ja tuottaa kolmannen virheen.



Kuva 1: Tehtävän 2 plottausta



Kuva 2: Hammingin koodin määrittely

Syventävät tehtävät

Seuraavat tehtävät palautetaan kirjallisina harjoitusten pitäjälle, kurssin palautuslokeroon tai sähköpostitse. Deadline 10.12.2019 klo 08.30.

4. Hammingin $(4, 7)$ -koodin pystyi esittämään moduloaritetiikalla ja matriisilaskennalla muodossa

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_1 + b_2 + b_3 \\ b_2 + b_3 + b_4 \\ b_1 + b_3 + b_4 \end{bmatrix}.$$

Muodosta matriisi H jolle pätee, että kun vastaanotettua signaalia kerrotaan matriisillä H , niin saadaan 3-vektori josta näkee mitkä kolmen ympyrän parillisuusehdoista ovat voimassa.

Ratkaisu:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Hammingin $(7, 4)$ -koodi osaa 'korjata' täsmälleen yhden lähetykseen ilmestyvän virheen. Suunnittele kanavakoodaus (joka **ei** ole toistokoodi R_k , $k \geq 5$) joka osaa korjata yhden tai kaksi virhettä. (**Vaihtoehtoinen suoritus:** Jos koodauksen suunnittelu tuntuu todella hankalalta, niin vaihtoehtoisesti perehdy johonkin kanavakoodiin joka toimii ja selosta sen toiminta.)
6. Tämä tehtävä on kuten aiemman viikon Quine-tehtävä, eli a) hauska ja b) "jos olet yrittänyt ratkaista tätä tosissasi ainakin tunnin, niin saat luovuttaa ja merkata tehdyksi, saat täydet pisteet". Ideana että sen pohtimista voi halutessaan jatkaa ilman aikataulupaineita sitten joskus, demoihin tulee linkki blogitekstiin jossa asiaa käydään antaumuksella läpi. Jos olet törmännyt pulmaan ennen, niin filistele vaikka sitä miten tilanteessa Shannon-bitit liikkuvat tjsp.

Olet Sirpa-Petterin kanssa omalaatuudessa Escape Roomissa. Pelin johtaja kertoo teille seuraavaa:

"Saatte kohta viettää 15 minuuttia aikaa tässä lukitussa huoneessa hiomas-
sa suunnitelmaanne. Tämän jälkeen noudan Sirpa-Petterin ja vien hänet
naapurihuoneeseen, jossa on seinän vieressä shakkilauta (eli 8x8-ruudukko)
johon on asetettu kunkin ruudun päälle yksi kolikko. Kolikot ovat joko
kruuna- tai klaavapuoli ylöspäin, joko satunnaisesti tai sitten minä olen
laittanut ne deterministisesti siihen. Shakkilaudan luona osoitan sormella-
ni jotakin siinä hetkessä valitsemaani ruutua ja sanon, että 'tämä on tai-
karuutu', jonka jälkeen Sirpa-Petteri saa kääntää **yhden** kolikon ympäri.
Tämän jälkeen lukitsen Sirpa-petterin kolmanteen huoneeseen, ja noudan
sinut katsomaan shakkilautaa. Jos osaat shakkilautaa katsomalla kertoa,
että mikä on taikaruutu, niin voitatte ja pääsette ulos."

Minkälaisen strategian suunnittelette Sirpa-Petterin kanssa jotta voitatte? (Tälle on ihan 'rehellinen' ratkaisu, joka ei nojaa siihen että kolikkoa kääntäessä se laitetaan johonkin nurkkaan, lämmitetään sitä kädessä tai viestitään jotenkin muuten nokkelasti. Kolikon valinta riittää.)

(*ROT13*- 'salattu' vihje: *Zurgv rafva gvynaarggn, wbjfn ba cvrarzcv funxxvynhgn wbaen fvihacvghhf ba rfvz xnxfv gnv arywä.*)

Ratkaisu:

<http://datagenetics.com/blog/december12014/index.html>