

JY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
MATA2500 Informaatioteoria, Syksy 2019
Harjoitus 5

Tämän viikon demoissa puhutaan kohinaisista kanavoista.

1. Laske symmetrisen ε -kohinaisen binäärikanavan kapasiteetti.
(Vihje: Saat käyttää tietoa, että tasajakauma maksimoi entropian. Kannattaa käyttää kaavaa $I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X)$.)
2. Tutkitaan ε -kohinaista Z -kanavaa, kun $\varepsilon = 0.25$. Oletetaan, että kanavan sisääntulojakauma on $\{(0, 1), (p_0, p_1)\}$. Laske kanavan yhteisinformaatio kun
 - (a) $p_0 = 0.5$,
 - (b) $p_0 = 0.43$, tai
 - (c) $p_0 = 0.57$.

Yllättääkö tulos sinua?

3. Tutkitaan $(7, 4)$ -Hammingin koodia.
 - (a) Muodosta syötteen 1100 Hammingin $(7, 4)$ -koodi.
 - (b) Pura saapunut viesti 0001101.
 - (c) Muodosta syötteen 1111 Hammingin $(7, 4)$ -koodi. Tutki miltä purettu viesti näyttää jos kohina on tuottanut viestiin kaksi virhettä.

Syventävät tehtävät

Seuraavat tehtävät palautetaan kirjallisina harjoitusten pitäjälle, kurssin palautuslokeroon tai sähköpostitse. Deadline 10.12.2019 klo 08.30.

4. Hammingin $(4, 7)$ -koodin pystyi esittämään moduloaritmetiikalla ja matriisilaskennalla muodossa

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_1 + b_2 + b_3 \\ b_2 + b_3 + b_4 \\ b_1 + b_3 + b_4 \end{bmatrix}.$$

Muodosta matriisi H jolle pätee, että kun vastaanotettua signaalia kerrotaan matriisilla H , niin saadaan 3-vektori josta näkee mitkä kolmen ympyrän parillisuusehdoista ovat voimassa.

5. Hammingin $(7, 4)$ -koodi osaa 'korjata' täsmälleen yhden lähetykseen ilmestyvän virheen. Suunnittele kanavakoodaus (joka ei ole toistokoodi R_k , $k \geq 5$) joka osaa korjata yhden tai kaksi virhettä. (**Vaihtoehtoinen suoritus:** Jos koodauksen suunnittelu tuntuu todella hankalalta, niin vaihtoehtoisesti perehdy johonkin kanavakoodiin joka toimii ja selosta sen toiminta.)

6. Tämä tehtävä on kuten aiemman viikon Quine-tehtävä, eli a) hauska ja b) “jos olet yrittänyt ratkaista tätä tosissasi ainakin tunnin, niin saat luovuttaa ja merkata tehdyksi, saat täydet pisteet”. Ideana että sen pohtimista voi halutessaan jatkaa ilman aikataulupaineita sitten joskus, demoihin tulee linkki blogitekstiin jossa asiaa käydään antaumuksella läpi. Jos olet törmännyt pulmaan ennen, niin fiilistele vaikka sitä miten tilanteessa Shannon-bitit liikkuvat tjsp.

Olet Sirpa-Petterin kanssa omalaatuisessa Escape Roomissa. Pelin johtaja kertoo teille seuraavaa:

“Saatte kohta viettää 15 minuuttia aikaa tässä lukitussa huoneessa hiomas-
sa suunnitelmaanne. Tämän jälkeen noudan Sirpa-Petterin ja vien hänet
naapurihuoneeseen, jossa on seinän vieressä shakkilauta (eli 8x8-ruudukko)
johon on asetettu kunkin ruudun päälle yksi kolikko. Kolikot ovat joko
kruuna- tai klaavapuoli ylöspäin, joko satunnaisesti tai sitten minä olen
laittanut ne deterministisesti siihen. Shakkilaudan luona osoitan sormella-
ni jotakin siinä hetkessä valitsemaani ruutua ja sanon, että ’tämä on tai-
karuutu’, jonka jälkeen Sirpa-Petteri saa kääntää **yhden** kolikon ympäri.
Tämän jälkeen lukitsen Sirpa-petterin kolmanteen huoneeseen, ja noudan
sinut katsomaan shakkilautaa. Jos osaat shakkilautaa katsomalla kertoa,
että mikä on taikaruutu, niin voitatte ja pääsette ulos.”

Minkälaisen strategian suunnittelette Sirpa-Petterin kanssa jotta voitatte? (Tälle on
ihan ’rehellinen’ ratkaisu, joka ei nojaa siihen että kolikkoa kääntäessä se laitetaan
johonkin nurkkaan, lämmitetään sitä kädessä tai viestitään jotenkin muuten nokke-
lasti. Kolikon valinta riittää.)

(ROT13-’salattu’ vihje: Zvrgv rafva gvynaarggn, wbfjn ba cvrarzcv funxxvynhgn wbaen
fvihacvghhf ba rfuz xnxfv gnv arywä.)