

JY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
MATA2500 Informaatioteoria, Syksy 2019
Harjoitus 1

Tämän viikon demoissa keskitytään todennäköisyyslaskennan siihen puoleen, jota jatkossa kovasti tarvitsemme.

1. Olet valinnut korttipakasta pelikortin umpimähkään. Miten monta bittiä informaatiota sinun pitää välittää jotta voit kertoa korttisi...

- (a) Värin?
- (b) Maan?
- (c) Arvon?

2. Luennoitsija käy joka päivä lounaalla joko Maijassa, Piatossa tai Ilokivessä. Hänen todennäköisyytensä käydä Maijassa on $p_M = 0.5$, todennäköisyytensä käydä Piatossa on $p_P = 0.4$ ja todennäköisyytensä käydä Ilokivessä on $p_M = 0.1$.

Maijassa käydessään hän syö kasvislounaan todennäköisyydellä 0.8 ja lihalounaan todennäköisyydellä 0.2. Piatossa käydessään hän syö kasvislounaan todennäköisyydellä 0.7 ja lihalounaan todennäköisyydellä 0.3. Ilokivessä käydessään hän syö kasvislounaan todennäköisyydellä 0.1 ja lihalounaan todennäköisyydellä 0.9.

- (a) Muodosta todennäköisyysjakaumat lounaspaikan valinnalle ja ruokavalion valinnalle. Muodosta näiden yhteisjakauma ja laske kunkin kolmen jakauman entropia. (Kannattaa piirtää 'puukuva'.)
- (b) Kasvislounas maksaa joka ravintolassa 5 euroa ja lihalounas 7 euroa. Olkoon X satunnaismuuttuja joka kuvaa lounaan hintaa. Muodosta satunnaismuuttujan X odotusarvo.
- (c) Luennoitsija mainitsee syöneensä eilen lihalounaan. Mikä on tämän paljastuksen informaation sisältö $h(p)$? Millä todennäköisyydellä hän oli eilen syömässä Ilokivessä? Paljonko informaatiota hän paljastaa mikäli hän kertoo tänään menneensä Ilokiveen?

3. Luennoilla esiintyneistä 16:a lapusta puolet olivat sinisiä. (Ja tasan yhden takana piilossa hymiö.) Kun saimme tietää että hymiö ei ole sinisen lapun takana, saimme yhden bitin verran informaatiota, sillä $-\log_2(8/16) = 1$. Vaihtoehtoinen viesti "hymiö ei ole lapun 2 takana" olisi antanut meille vain $-\log_2(15/16) \approx 0.09$ bitin verran informaatiota.

- (a) Esität laput opiskelijatoverillesi, ja rupeat kääntämään sinisiä lappuja yksi kerran ympäri. Kuinka monta bittiä informaatiota hän oppii erikseen kustakin kahdeksasta käännöksestä? (Kohtelee jokaista tapahtumaa erillisenä tapahtumana jossa toverisi näkee n lappua ja oppii että yhden takana ei ole hymiötä.) Paljon informaatiota hän oppii yhteensä kaikkien käännösten jälkeen?
- (b) Vertaa informaatiomäärää jos taikuri paljastaa valitsemansa pelikortin joko suoraan tai kertomalla 51 kertaa "tämä ei ole valitsemani kortti".

Syventävät tehtävät

Seuraavat tehtävät palautetaan kirjallisina harjoitusten pitäjälle, kurssin palautuslokeroon tai sähköpostitse. Deadline ekan demokerran alku 6.11.2019 klo 08.15.

4. Todista, alempana mainittua Jensenin epäyhtälöä käyttäen, *Gibbsin epäyhtälö*: Kahdelle samassa joukossa määritetyille äärelliselle todennäköisyysjakaumalle P ja Q pätee

$$\sum_x P(x) \log \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right) \geq 0.$$

(*Vihje: Todistus on lyhyt kunhan löydät oikean funktion johon Jensenin epäyhtälöä kannattaa soveltaa.*)

5. Sirpa-Petteri ja Saku-Maija suorittavat seuraavanlaisen operaation.

Naapurihuoneessa on viisi identtistä kangaspussia, joissa kussakin on neljä palloa. Yhdessä ruukussa on pelkästään mustia palloja, toisessa yksi valkoinen ja kolme mustaa, kolmannessa kaksi valkoista ja kaksi mustaa, jne.

Sirpa-Petteri menee naapurihuoneeseen ja valitsee umpimähkään yhden pusseista. Hän poimii pussista umpimähkään pallon, katsoo sen värin, pistää takaisin pussiin ja ravistaa pussin sisällön sekaisin. Sitten hän toistaa toimenpiteen kolmesti, eli hän on tehnyt neljä nostoa pussista.

Sirpa-Petteri palaa Saku-Maijan luo ja kertoo että nosti umpimähkäisesti pussista kolme mustaa ja yhden valkoisen pallon.

- (a) Mikä on todennäköisyys sille, että Sirpa-Petteri oli valinnut pussin jossa on 2 mustaa ja 2 valkoista palloa?
- (b) Olkoon X satunnaismuuttuja "Sirpa-Petterin valitsemassa pussissa olleiden valkoisten pallojen lukumäärä". Muodosta jakauma

$$P(X = k | \text{Sirpa-Petteri sai 3 mustaa ja yhden valkoisen pallon}).$$

- (c) Fiilistele miten tehtävä liittyy siihen, että heität kolikkoa kolmesti saaden kolme klaavaa ja yhden kruunan, jonka jälkeen pohdit miten vahvasti uskot että kolikko ei ole painotettu.

Vihje: Bayesin kaava sanoo, että

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}.$$

6. Todista seuraava versio *Jensenin epäyhtälöstä*: Olkoon $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ konvekssi funktio, eli millä tahansa $x_1, x_2 \in (a, b)$ pätee

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

kaikilla $\lambda \in [0, 1]$. Tällöin mikäli $p_1, \dots, p_n > 0$ ovat lukuja joille pätee $\sum_j p_j = 1$, niin

$$f\left(\sum_{j=1}^n p_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^n p_j f(x_j).$$

Vihje: kirjoita ensin $\lambda = p_1 = p_1/(\sum_{j=1}^n p_j)$. Tee jotain ovelaa. Kirjoita sitten $\lambda = p_2/(\sum_{j=2}^n p_j)$. Tee lisää ovelaa. Jatka hyvää rataa.