

Kertaustehtäviä (JMA4, kevät 2019)

Kurssikokeeseen osallistuaksesi tarvitset 30 % laskuharjoituspisteistä eli **39 pistettä**.

Jos tarvitset lisää pisteitä osallistuaksesi kurssikokeeseen (tai haluat korottaa lisäpistekertymäsi), palauta kirjallisesti (VIIMEISTÄÄN keskiviikkona 22.5.2019) kaikki tai osa tehtävistä 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ja 8. Jokaisesta tehtävästä voi saada korkeintaan 2 pistettä.

1. Tutki suppeneeko epäoleellinen integraali.

(a) $\int_0^1 \frac{\cos x}{x^2} dx$

(b) $\int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$

2. Tutki suppeneeko sarja.

(a) $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{1 + \sqrt{k}}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k^2}$

3. Olkoot $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots$. Mitkä seuraavista väitteistä ovat totta ja mitkä epätosia? (Jokaiseen kohtaan lyhyt perustelu tai vastaesimerkki.)

(a) Jos $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0$, niin $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee.

(b) Jos lukusarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee itseisesti, niin tällöin myös lukusarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2$ suppenee.

4. Olkoot $f_n:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{1}{nx + 1}.$$

(a) Osoita, että funktiojono $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suppenee pisteittäin joukossa $]0, 1[$.

(b) Suppeneeko funktiojono $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tasaisesti joukossa $]0, 1[$?
Entä suppeneeko funktiojono $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tasaisesti joukossa $]\frac{1}{2}, 1[$?

5. (a) Määrää funktioiden $f:]-1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x \log(1 + x) \quad \text{ja} \quad g(x) = \cos x,$$

kolmannet Taylorin polynomit $T_{3,0}f$ ja $T_{3,0}g$.

- (b) Osoita Taylorin polynomeja käyttämällä ja jäännöstermiä arvioimalla, että

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \quad \text{kaikilla } x \in [-\pi, \pi].$$

6. Tutki missä pisteissä $x \in \mathbb{R}$ seuraava potenssisarja suppenee:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-4)^k}{3^k(k+2)}.$$

7. Osoita, että funktiosarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} n2^{-n} \sin(nx)$$

suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$. (Vihje: Weierstrassin M -testi)

8. Osoita edellisen tehtävän perusteella, että

$$\int_0^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} n2^{-n} \sin(nx) dx = \frac{4}{3}.$$

MUITA KERTAUSTEHTÄVIÄ

Seuraavista tehtävistä ei saa lisäpisteitä eikä niitä arvostella, mutta niillä voi harjoitella ja kerrata tenttiä varten.

K1. Tutki suppeneeko epäoleellinen integraali.

- (a) $\int_1^{\infty} \frac{e^{\cos x}}{\sqrt{x}} dx$
- (b) $\int_{-1}^3 \frac{1}{(x-1)^3} dx$
- (c) $\int_1^{\infty} \frac{\log x}{x^2} dx$
- (d) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^2} dx$

K2. Tutki suppeneeko epäoleellinen integraali.

- (a) $\int_{-1}^7 \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} dx$
- (b) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}} dx$
- (c) $\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx$

K3. Tutki suppeneeko epäoleellinen integraali.

- (a) $\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{(5-x)(x-1)}} dx$
- (b) $\int_1^{\infty} \frac{\log x}{x\sqrt{x^2-1}} dx$

K4. Millä arvoilla $s \in \mathbb{R}$ epäoleellinen integraali

$$\int_1^{\infty} \frac{2}{3+4x^s} dx$$

suppenee?

K5. Olkoon $f: [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva funktio, ja oletetaan, että $\lim_{x \rightarrow \infty} x^p f(x) = A$, missä $A \in \mathbb{R}$ ja $p > 1$. Osoita, että epäoleellinen integraali $\int_1^{\infty} f(x) dx$ suppenee.

K6. Tutki, suppeneeko epäoleellinen integraali $\int_0^1 \frac{1}{e^{x^2} - 1} dx$.
(Vihje: Taylor)

K7. Olkoot $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots$. Mitkä seuraavista väitteistä ovat totta ja mitkä epätosia? (Jokaiseen kohtaan lyhyt perustelu tai vastaesimerkki.)

- (a) Jos sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee, niin $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0$.
- (b) Jos $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee, niin myös sarja $\sum_{j=1}^{\infty} (a_j)^2$ suppenee.
- (c) Jos $a_j \geq 0$ kaikilla j ja $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0$, niin sarja $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} a_j$ suppenee.
- (d) Jos $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee, niin joukosta $\{a_j, j = 1, 2, \dots\}$ löytyy suurin alkio.
- (e) Jos $\sum_{j=1}^{\infty} (a_j + b_j)$ hajaantuu, niin ainakin toinen sarjoista $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ ja $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ hajaantuu.
- (f) Lukusarja $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j a_j$ suppenee.

K8. Tutki suppeneeko sarja.

- (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k}$
- (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{k}\right)^k$
- (c) $\sum_{k=1}^{\infty} k e^{-k^2}$
- (d) $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - \sqrt[k]{k})^k$

K9. Tutki suppeneeko sarja.

- (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \log(1 + \frac{1}{k})}$
- (b) $\sum_{k=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$
- (c) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(\log k)^k}$

K10. Olkoot $a_k, b_k > 0$ kaikilla $k = 1, 2, \dots$. Osoita, että jos

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}$$

kaikilla k ja sarja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ suppenee, niin myös $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee.

K11. Olkoot $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{1 - |x|^n}{1 + |x|^n}.$$

Osoita, että funktiojono $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suppenee pisteittäin joukossa $\mathbb{R}$.

Suppeneeko funktiojono $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tasaisesti joukossa $\mathbb{R}$? Entä suppeneeko se tasaisesti joukossa $[2, \infty[$?

K12. Mitä tarkoitetaan lukusarjojen Cauchyn tulolla?

K13. Tutki missä pisteissä $x \in \mathbb{R}$ seuraava sarja suppenee:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(1+x^2)^k}.$$

K14. Tutki, missä pisteissä funktiosarja $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k x^k}{\log(k+2)}$ suppenee (ja missä se hajaantuu).

K15. Tutki

(a) missä pisteissä $x \neq 0$ funktiosarja $\sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{x}{3}\right)^k + \left(\frac{1}{4x}\right)^k \right]$ suppenee.

(b) missä pisteissä $x \neq \frac{1}{2}$ sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x-2}{2x-1} \right)^k$$

suppenee.

K16. Laske raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2 \sin x}{\sin^3 x}$$

käyttäen Taylorin polynomeja.

K17. Määritä raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - a^x}{1 - b^x}$$

käyttämällä Taylorin polynomeja.

K18. Olkoon $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ kahdesti jatkuvasti derivoituva ja $x_0 \in]a, b[$. Osoita, että

$$f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2}.$$

(Vihje: Taylorin lause)

K19. Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kolmesti jatkuvasti derivoituva funktio, jonka toinen Taylorin polynomi nollassa on $T_{2,0}f(x) = x^2$. Osoita, että lukusarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{k}\right)$$

suppenee.

K20. Olkoot $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ ja $\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ potenssisarjoja, joiden suppenemissäteet ovat R_1 ja R_2 , $0 < R_1 < R_2$.

(a) Osoita, että potenssisarjan $\sum_{j=0}^{\infty} (a_j + b_j) x^j$ suppenemissäde on R_1 .

(b) Päteekö (a) kohdan tulos jos $R_1 = R_2$?

K21. Olkoon $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$, $x \neq 1$.

(a) Laske $T_{2,0}f(x)$.

(b) Esitä f potenssisarjana muodossa $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Missä joukossa saamasi esitys on voimassa?

(Muista: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.)

K22. Mitä voit sanoa potenssisarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ suppenemissäteestä, jos

(a) tiedetään, että on olemassa vakiot $0 < m \leq M < \infty$ siten, että $a_k \in [m, M]$ kaikilla k ?

(b) tiedetään, että $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ hajaantuu?

K23. Tarkastellaan potenssisarjaa $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j$.

(a) Onko mahdollista, että potenssisarja suppenee pisteissä $x = 2$ ja $x = -2$, mutta hajaantuu pisteessä $x = 0$? Perustele.

(b) Jos tiedetään, että sarja $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ hajaantuu ja potenssisarja $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j$ suppenee pisteessä $x = 3$, niin mitä voit sanoa potenssisarjan suppenemissäteestä ja luvusta x_0 ?

K24. Olkoot $f_k, f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ funktioita siten, että $f_k \rightarrow f$ pisteittäin välillä $[0, 1]$. Oletetaan lisäksi, että

$$|f_k(x) - f_k(y)| \leq 10|x - y| \quad \text{kaikilla } x, y \in [0, 1] \text{ ja kaikilla } k \in \mathbb{N}.$$

(a) Osoita, että f on jatkuva.

(b) Osoita, että $f_k \rightarrow f$ tasaisesti välillä $[0, 1]$.

K25. Olkoot $f, f_k: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funktioita.

(a) Määrittele funktiojonon (f_k) tasainen suppeneminen.

(b) Oletetaan, että f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja että aina, kun $(x_k) \subset [a, b]$ on suppeneva lukujono ja $\hat{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$, niin pätee

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x_k) = f(\hat{x}).$$

Osoita, että tällöin $f_k \rightarrow f$ tasaisesti joukossa $[a, b]$.

K26. Osoita, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} k e^{-kx}$$

suppenee jokaiselle $x > 0$ ja laske tarkasti perustellen integraali

$$\int_1^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} k e^{-kx} \right) dx.$$

K27. Osoita, että funktiosarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k(1+kx^2)}$$

suppenee tasaisesti koko reaaliakselilla $\mathbb{R}$.

Merkitään $f_k(x) = \frac{x}{k(1+kx^2)}$. Suppeneeko funktiojono (f_k) tasaisesti?

K28. Olkoot $f_k: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_k(x) = x^k(1-x).$$

(a) Osoita, että funktiosarja $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ suppenee tasaisesti välillä $[0, a]$ millä tahansa $0 < a < 1$.

(b) Suppeneeko funktiosarja tasaisesti välillä $[0, 1]$?

K29. Olkoon $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva funktio, jolle $g(1) = 0$. Osoita, että funktiojono $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n g(x)$ suppenee tasaisesti välillä $[0, 1]$.