Ihmissuhteen yhtenäistäminen

$\mathbb{R}$ami Luisto

3. joulukuuta 2012

Tiivistelmä

Seuraavassa kirjoitelmassa paneudutaan hetkeksi siihen, miten kihlaus voidaan tulkita metrisen topologian avulla kahden erillisen joukon yhtenäistämisenä. Inspiraatio syntyi kurssin "Opettajalinjan työpaja (Topologia I)" oppilaan kihlautumisesta, ja kirjoitelma on omistettu E & E:n kihlaukselle.

Johdanto sekä muutama huomio ihmissuhteen metrisistä ominaisuuksista.

Kirjoitelmassa ihmiset oletetaan metrisiksi avaruuksiksi. Tämä on luonnollinen oletus, sillä ihmisille määritellään usein metrisiä ominaisuuksia, kuten pituus, mutta metriikan tarkka määritelmä jätetää kiinnostuneelle lukijalle. Lisäksi kaikki ihmiset oletetaan yhtenäisiksi, sillä kirjoitelman mielenkiintona on ihmisten väliset ihmissuhteet, joihin ihmisten irtonaiset osat eivät suoraan vaikuta.

Jatkossa oletetaan, että E_{Er} ja E_{Em} ovat kaksi (erillistä) ihmistä, jotka äskeisen perusteella tulkitaan yhtenäisiksi metrisiksi avaruuksiksi. Tunnetusti täydellisiä miehiä tai naisia ei ole olemassa, ja vaikka olisikin eivät he voisi olla täydellisiä ilman omaa rakastaan. Täten voidaan olettaa, että joukot E_{Er} sekä E_{Em} eivät ole täydellisiä metrisinä avaruuksina.

Henkilöiden E_{Er} ja E_{Em} oletetaan lisäksi olevan onnellisessa parisuhteessa, jolloin he ovat toistensa kaikkensa, eli voidaan rajoittua tarkastelemaan heidän yhteistä kaikkeuttaan[1] $X = E_{Er} \cup E_{Em}$. Tämä erillinen yhdiste kahdesta metrisestä ihmisavaruudesta ei ole vielä metrinen avaruus, (sillä ei ole annettu tapaa mitata pisteiden $x \in E_{Er}$ ja $y \in E_{Em}$ etäisyyttä) mutta sinne voidaan asettaa topologia $\mathcal{T}$ määrittämällä, että joukko $U \subset X$ on avoin avaruudessa X jos ja vain jos joukko $U \cap E_{Er}$ on avoin avaruudessa E_{Er} ja joukko $U \cap E_{Em}$ on avoin avaruudessa E_{Em}. Erityisesti voidaan puhua topologisen avaruuden $(X, \mathcal{T})$ yhtenäisyydestä.

Vaikka E_{Er} ja E_{Em} muodostavat yhdessä yhteisen kaikkeutensa X, ei tämän kaikkeuden X tarvitse olla (ainakaan a priori) yhtenäinen avaruus. Toki ihmiset voivat yhdessä muodostaa hetkittäin yhtenäisen kokonaisuuden kuten ne kuuluisat kaksi yössä kohtaavaa laivaa, mutta valtaosan arkipäivistä joutuvat ihmiset viettämään aidosti erillään. Myöskin mikäli parisuhdekaikkeuden topologia määritellään kuten yllä, niin pari $(E_{Er}|E_{Em})$ muodostaa avaruuden X separaation.

[1] Tätä kaikkeutta kutsutaan usein lyhyesti parisuhteeksi.

Kirjoitelman ideana onkin tarjota tähän epäyhtenäisyysongelmaan kihlauksena tunnettu ratkaisu, jossa abstraktilla parisuhdekaikkeuden sekä metriikan laajennuksella voidaan tilanne vahventaa yhtenäiseksi, peräti metriseksi, avaruudeksi. Tämän saavuttamiseksi riittää parisuhteeseen lisätä yksi piste, nk. 'kihlapiste' ∞.

Päätulokset

Parisuhteen X yhtenäistäminen suoritetaan seuraavalla lauseella, jossa parisuhteesta muodostetaan vahvempi versio, nk. *kihlattu laajennus*, lisäämällä parisuhteeseen kihlapiste ∞ ja laajentamalla ihmisten E_{Em} ja E_{Er} metriikat tähän laajennukseen.

Lause. Olkoot E_{Em} ja E_{Er} kaksi erillistä metristä avaruutta jotka ovat yhtenäisiä mutta epätäydellisiä. Tällöin on olemassa topologisen avaruuden X yhden pisteen yhtenäistymä[2] X^∞, eli parisuhteen X kihlattu laajennus.

Todistus. Koska metriset avaruudet E_{Em} ja E_{Er} eivät ole täydellisiä metrisiä avaruuksia voidaan kummastakin valita Cauchyn jonot $(x_n) \subset E_{Er}$ sekä $(y_n) \subset E_{Em}$ jotka eivät suppene.

Valitaan seuraavaksi sellainen alkio/symboli joka ei kuulu avaruuteen X (käytännön tilanteissa tällaisen pisteen voi löytää esimerkiksi korukaupasta). Merkitään tätä niin kutsuttua kihlapistettä merkillä ∞, joka symboloi mukavasti sekä äärettömyyttä, ikuisuutta että kahden sormuksen muodossa liittoa.

Merkitään avaruuksen E_{Em} ja E_{Er} metriikoita d_{Em} ja d_{Er} ja määritellään avaruuteen $X^\infty = X \cup \{\infty\}$ metriikka asettamalla

$$d(x,\infty) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} d_{Er}(x,x_n), & \text{kun } x \in E_{Er} \\ \lim_{n\to\infty} d_{Em}(x,y_n), & \text{kun } x \in E_{Em}, \end{cases}$$

sekä

$$d(x,y) = \begin{cases} d_{Er}(x,y), & \text{kun } x,y \in E_{Er} \\ d_{Em}(x,y), & \text{kun } x,y \in E_{Em} \\ d_{Er}(x,\infty) + d_{Em}(y,\infty), & \text{kun } x \in E_{Er}, y \in E_{Em} \\ d_{Em}(x,\infty) + d_{Er}(y,\infty), & \text{kun } x \in E_{Em}, y \in E_{Er}. \end{cases}$$

Nyt metrinen avaruus (X^∞, d) on yhtenäinen metrinen avaruus (Harjoitustehtävät 1-2.) ja parisuhteen X kihlattu laajennos. (HT 3.) $\square$

Huomaa, että edellisen lauseen johdosta ovat henkilöt E_{Er} ja E_{Em} nyt aina vierekkäin, sillä (HT 4.) $d(E_{Er},\infty) = 0$ ja $d(E_{Em},\infty) = 0$, joten $d(E_{Er}, E_{Em}) = 0$.

[2] Tämä ei ole virallinen sana, mutta kahden metrisen avaruuden X_1 ja X_2 yhteen pisteen yhtenäistys on sellainen *yhtenäinen* metrinen avaruus X jolle pätee, että on olemassa isometriset upotukset $\iota_i \colon X_i \to X$, $i = 1,2$ joille pätee, että

$$X \setminus (\iota_1 X_1 \cup \iota_2 X_2) = \{x_0\} \quad \text{ja} \quad \iota_1 X_1 \cap \iota_2 X_2 = \emptyset.$$

Käytännössä siis kyseinen yhtenäistymä on joukko joka koostuu erillisenä yhdisteenä joukoista X_1, X_2 sekä jonkin pisteen muodostamasta yksiöstä $\{x_0\}$.

Harjoitustehtäviä:

1. Todista, että joukon X^∞ metriikka d on hyvinmääritelty ja täyttää metriikan määritelmän ehdot.
2. Todista, että inkluusiot $\iota_{Er} \colon E_{Er} \hookrightarrow X^\infty$ sekä $\iota_{Em} \colon E_{Em} \hookrightarrow X^\infty$ ovat isometrisiä upotuksia.
3. Todista, että avaruus X^∞ on yhtenäinen metrinen avaruus.
4. Todista, että avaruudessa X^∞ pätee $d(E_{Er}, \infty) = 0$ ja $d(E_{Em}, \infty) = 0$, joten $d(E_{Er}, E_{Em}) = 0$.